Chapitre 30

Matrices et applications linéaires

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
E, F et G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels **de dimension finie** (sur le même corps $\mathbb{K}$).
n, m et p sont des entiers de $\mathbb{N}^*$.

Remarque (Identification $\mathbb{K}^n$–$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$)**.** On identifie $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Un vecteur $(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ peut donc s'écrire de deux manières :

$$(x_1,\cdots,x_n) \overset{\text{id.}}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ne pas confondre $x=(x_1,\cdots,x_n)$ avec la matrice ligne $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$, où il n'y a pas de virgule.

1 Matrice associée à un morphisme

1.1 Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs

Définition 30.1 – Matrice d'un vecteur

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ un vecteur de E. On appelle matrice de x dans la base $\mathcal{B}$, la matrice colonne notée

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Autrement dit, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est la matrice colonne constituée des coordonnées de x selon la base $\mathcal{B}$.

Exemple 1. Donner la matrice du vecteur $x = (2,3) \in \mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B} = ((1,1),(1,-1))$ puis dans la base $\mathcal{B}' = ((1,-1),(1,1))$.

On cherche les coordonnées de x selon $\mathcal{B}$:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) =$$

et puis selon $\mathcal{B}'$:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) =$$

Remarque. Si $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et si $x \in \mathbb{R}^n$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(x) \overset{\text{id.}}{=} x$.

Définition 30.2 – Matrice d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, et $(c_1, \cdots, c_m)$ une famille quelconque de vecteurs de E. On appelle matrice de $(c_1, \cdots, c_m)$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice dont la j-ième colonne est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_j)$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_1, \cdots, c_m) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_1) & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_2) & \cdots & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$$

Ainsi, le coefficient d'indice (i,j) de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_1, \cdots, c_m)$ est le i-ième coefficient de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_j)$. C'est donc l'unique scalaire $a_{ij} \in \mathbb{K}$ tel que

$$c_j = (\cdots)e_1 + \ldots + \quad a_{ij} e_i \quad + \ldots + (\cdots)e_n$$

Exemple 2. Dans $\mathbb{R}^3$, la matrice de la famille $\mathcal{F} = ((1,4,8),(-3,5,3),(6,-6,2))$ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{F}) =$$

1.2 Matrice d'une application linéaire (quelconque)

Rappel : si $\mathcal{F} = (c_1, \cdots, c_m)$ est une famille quelconque de vecteurs de E, on note

$$u(\mathcal{F}) := (u(c_1), \cdots, u(c_m))$$

Définition 30.3 – Matrice d'une application linéaire

Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, et $\mathcal{B}_F = (f_1, \cdots, f_p)$ une base de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice de la famille $u(\mathcal{B}_E)$ dans la base $\mathcal{B}_F$, notée

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_1), \cdots, u(e_n)) \\ &= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_1)) & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_2)) & \cdots & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_n)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})\end{aligned}$$

Remarque. Représentation mnémotechnique :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u) = \begin{array}{c c} & u(\mathcal{B}_E) \\ \mathcal{B}_F & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_n) \end{matrix} \\ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$ a autant de lignes que le cardinal de $\mathcal{B}_F$, ici p.
- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$ a autant de colonnes que le cardinal de $\mathcal{B}_E$ ou de $u(\mathcal{B}_E)$, ici n.

En particulier, si $u : \mathbb{R}^{\boxed{n}} \to \mathbb{R}^{\boxed{p}}$ est linéaire, sa matrice dans des bases quelconques est une matrice de $\mathcal{M}_{\boxed{p,n}}(\mathbb{K})$.

Méthode – Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$

Pour déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$, on identifie soigneusement la base de départ $\mathcal{B}_E$ et la base d'arrivée $\mathcal{B}_F$.

Pour chaque vecteur e_j de $\mathcal{B}_E$, on détermine les coordonnées de $u(e_j)$ selon $\mathcal{B}_F$ (ce qui conduit à résoudre un système dont les coordonnées sont les inconnues).

Une fois les coordonnées de $u(e_j)$ calculées, on les reporte dans la j-ième colonne de la matrice.

Exemple 3. On considère $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $u(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+5y+2z \\ -x+4z \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}_c}(u)$, où $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Remarque. Si $F = \mathbb{R}^p$ et que $\mathcal{B}_F$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$, comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_j)) \overset{\text{id.}}{=} u(e_j)$, il suffit de reporter le vecteur $u(e_j)$ sur la j-ième colonne de la matrice.

Exemple 4. On considère $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$ définie par par $u(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+5y \\ -x+15y \\ ex-\pi y \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}{}^{\mathcal{B}}(u)$, avec $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4i \end{pmatrix} \right)$ (qui est une base de $\mathbb{C}^2$) et $\mathcal{B}_c$ la base canonique (de $\mathbb{C}^3$).

1.3 Matrice d'un endomorphisme

Pour obtenir la matrice d'un endomorphisme $u : E \to E$, il faudrait donc techniquement se donner une base $\mathcal{B}_E$ et une autre base $\mathcal{B}'_E$... En pratique, on prendra toujours systématiquement la même base, afin que ce soit plus facile à interpréter.

Définition 30.4 – Matrice d'un endomorphisme dans une base

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_1)) & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_2)) & \cdots & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_n)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Remarque. Représentation mnémotechnique :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{cc} & u(\mathcal{B}) \\ \mathcal{B} & \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ possède toujours autant de lignes et de colonnes que le cardinal de $\mathcal{B}$, ici n, donc c'est une matrice de $\mathcal{M}_{\boxed{n}}(\mathbb{K})$.

Exemple 5. Pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, la matrice de id_E dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 6. On considère $E = \mathbb{R}_3[X]$ avec pour base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(P) = P - P'$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

1.4 Opérations avec les matrices associées

Théorème 30.5 – Matrices de $u+v$, de λu

On suppose que $\dim E = n$ et $\dim F = p$. Soit $\mathcal{B}_E$ (resp. $\mathcal{B}_F$) une base de E (resp. F), et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(E, F) &\to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ u &\mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u) \end{aligned}$$

est un **isomorphisme** d'e.v.

En particulier, pour tous $u,v \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a (on écrira “Mat” au lieu de ${\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}}^{\mathcal{B}_E}$ par souci de lisibilité) :

$$\mathrm{Mat}(\alpha u+\beta v)=\alpha\mathrm{Mat}(u)+\beta\mathrm{Mat}(v)$$

$$\mathrm{Mat}(\lambda u)=\lambda\mathrm{Mat}(u)$$

$$\mathrm{Mat}(u)=\mathrm{Mat}(v) \iff u=v$$

Remarque. À noter que l'application Φ dépend du choix des bases $\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F$. Il faut donc absolument que ce soient les mêmes bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ qui apparaissent à chaque “Mat” ci-dessus.

Preuve partielle du Théorème 30.5. On ne démontrera pas que Φ est linéaire. Montrons que Φ est bijective. Comme

$$\dim\mathcal{L}(E,F)=\dim E\times\dim F=np=\dim\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

il suffit de montrer que Φ est injective. Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$ tel que $\Phi(u)={\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}}^{\mathcal{B}_E}(u)=0_{p,n}$. Alors, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_i))=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad u(e_i)=0f_1+\ldots+0f_p=0_F$$

Ainsi, u envoie chaque vecteur e_i sur 0_F. L'application u est donc nulle (par linéarité). Ainsi, $u=0_{\mathcal{L}(E,F)}$. Donc Φ est injective. □

Théorème 30.6 – Matrice de $u(x)$

Soit $\mathcal{B}_E$ (resp. $\mathcal{B}_F$) une base de E (resp. F), et $u\in\mathcal{L}(E,F)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(x))={\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}}^{\mathcal{B}_E}(u)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$$

Théorème 30.7 – Matrice de $v\circ u$

Soit $\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G$ des bases respectives de E,F,G. Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$ et $v\in\mathcal{L}(F,G)$. Alors

$${\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G}}^{\mathcal{B}_E}(v\circ u)={\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G}}^{\mathcal{B}_F}(v)\times{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}}^{\mathcal{B}_E}(u)$$

Théorème 30.8 – Matrice de u^{-1}

Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est inversible.
2. Il existe une base $\mathcal{B}_E$ de E et une base $\mathcal{B}_F$ de F telles que ${\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}}^{\mathcal{B}_E}(u)$ soit inversible.
3. Pour toute base $\mathcal{B}_E$ de E et pour toute base $\mathcal{B}_F$ de F, la matrice ${\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}}^{\mathcal{B}_E}(u)$ est inversible.

De plus lorsque ces assertions sont vérifiées, on a :

$${\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}}^{\mathcal{B}_F}(u^{-1})=\left({\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}}^{\mathcal{B}_E}(u)\right)^{-1}$$

Démonstration.

□

1.5 Reformulation pour les endomorphismes

On reformule les résultats obtenus en section 1.4 dans le cas $E = F$. On rappelle que dans ce cas on prend (quasi-systématiquement) la même base au départ et à l'arrivée : $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$. Soit donc $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. On note

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\ \alpha u + \beta v\ ) = \alpha \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) + \beta \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\ u(x)\ ) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\ v \circ u\ ) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

Enfin, $u \in GL(E)$ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in GL_n(\mathbb{R})$ et alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\ u^{-1}\ ) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^{-1}$$

Exemple 7. On reprend l'endomorphisme $u : P \to P - P'$ de $\mathbb{R}_3\left[X\right]$ de l'Exemple 6. Montrer que u est inversible et déterminer son inverse u^{-1}. Que vaut $u^{-1}(X^2)$?

2 Changements de base

On a vu aux Exemples 1 et 3 qu'il n'est pas facile d'écrire la matrice d'un vecteur ou d'une application linéaire lorsque la base d'arrivée n'est pas canonique. On est souvent amené à résoudre des systèmes linéaires. On va voir ici une méthode qui réduira le problème à un simple produit matriciel.

2.1 Matrices de passage

Définition 30.9

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ la matrice notée

$$P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'} := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E) = \begin{array}{cc} & \mathcal{B}' \\ \mathcal{B} & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Si $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$, on a donc $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \cdots, e'_n)$. Attention à ne pas confondre la matrice $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$ avec la matrice $P_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{B}}$, où les rôles de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont échangés !

Remarque. La matrice de passage d'une base canonique $\mathcal{B}_c$ à une base quelconque $\mathcal{B}$, càd $P_{\mathcal{B}_c}{}^{\mathcal{B}}$ est très facile à calculer : comme la base $\mathcal{B}_c$ est "à l'arrivée", il suffit de reporter en colonne les vecteurs de $\mathcal{B}$.

Exemple 8. On pose $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{B}_c$ la base canonique. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$.

À noter : une matrice de passage est toujours carrée. Si on note $n = \dim E$, alors $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 30.10

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La matrice $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$ est toujours inversible et

$$\left(P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{B}}$$

Démonstration. On sait que l'application id_E est bijective et est sa propre inverse. Ainsi, on a vu que $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'} := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)$ est inversible et $\left(P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{B}}((\mathrm{id}_E)^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = P_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{B}}$. □

Exemple 9. (suite de l'exemple précédent) Calculer $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}_c}$.

2.2 Changements de base

Théorème 30.11 – Changement de base pour un vecteur

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$$

Dit autrement, avec $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $\quad X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$, $\quad$ et $P = P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$, alors $X = PX'$. Autrement dit, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ permet de passer des coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$... à celles dans $\mathcal{B}$ (!). La terminologie est très, très contre-intuitive, attention à ne pas se tromper !

Exemple 10. Soit $\mathcal{B} = ((1,2,3),(2,3,4),(3,4,4))$. Déterminer la matrice du vecteur $x = (1,-1,0)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème 30.12 – Changement de bases pour un morphisme

Soit $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C},\mathcal{C}'$ deux bases de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{C}}\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}{}^{\mathcal{B}}(u)\ P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$$

Si on pose $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{B}'}(u)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}{}^{\mathcal{B}}(u)$, $P = P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{C}}$, cette relation se réécrit

$$A' = QAP$$

Théorème 30.13 – Changement de base pour un endomorphisme

Soit $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ deux bases de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{B}}\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\ P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$$

Si on pose $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $P = P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$, cette relation se réécrit

$$A' = P^{-1}AP$$

Exemple 11. On considère $\mathcal{B} = ((1,2,3),(2,3,4),(3,4,4))$, et $\quad u(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x+4y+4z \\ -6x-7y-8z \\ 3x+4y+5z \end{pmatrix}$

Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. En déduire que u est un projecteur, et déterminer ses éléments caractéristiques, ainsi qu'une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$.

3 Morphisme canoniquement associé à une matrice

3.1 Définition

En section précédente, on a vu que, en fixant $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases de E et de F, l'application $\Phi : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme (avec $n = \dim E$ et $p = \dim F$). En particulier, à toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, il existe un unique morphisme $u_A \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $\Phi(u_A) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u_A) = A$. Cependant, le morphisme u_A est unique à condition d'avoir fixé $E, F, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$. Afin de définir cet objet de manière unique, on prendra $E = \mathbb{K}^n$ et $F = \mathbb{K}^p$ munis de leurs bases canoniques.

Définition 30.14

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On appelle morphisme canoniquement associé à A l'unique application linéaire $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ telle que
$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p}{}^{\mathcal{B}_n}(u_A)$$
où $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_p$ sont les bases **canoniques** respectives de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$. *(notation non officielle pour $\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_p$)*

Remarque (Calcul de $u_A(x)$)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $u_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ son morphisme canoniquement associé. Pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \overset{\text{id.}}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, on a : $u_A(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p}{}^{\mathcal{B}_n}(u_A)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(x) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Ainsi, u_A est l'application qui au vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{K}^n$ associe le vecteur $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{K}^p$.

Exemple 12. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Alors le morphisme canoniquement associé à A est le morphisme

$u_A : \quad \to \quad$ défini par :

3.2 Noyau, image et rang d'une matrice

Définition 30.15

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ son morphisme associé. On définit

- Le noyau de A par $\operatorname{Ker} A := \operatorname{Ker}(u_A)$ (c'est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n \overset{\text{id.}}{=} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).
- L'image de A par $\operatorname{Im} A := \operatorname{Im}(u_A)$ (c'est un s.e.v. de $\mathbb{K}^p \overset{\text{id.}}{=} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$).
- Le rang de A par $\operatorname{rg} A := \operatorname{rg} u_A = \dim(\operatorname{Im} u_A) = \dim(\operatorname{Im} A)$.

Étant donné une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on souhaite déterminer $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$. D'après la définition ci-dessus, on pourrait déterminer u_A puis $\operatorname{Ker} u_A$ et $\operatorname{Im} u_A$. Cependant, on peut remarquer que :

$$\begin{aligned}
u_A(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_p) &\iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \cdots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n = y_p \end{cases} \\
&\iff \left(\begin{array}{c|c} & y_1 \\ A & \vdots \\ & y_p \end{array} \right) \qquad \text{(matrice augmentée du système)}
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut rester dans l'univers des matrices, grâce aux caractérisations suivantes :

Théorème 30.16 – Caractérisations de Ker A et Im A

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $X \in \mathbb{K}^n$ et $Y \in \mathbb{K}^p$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A \iff (x_1, \cdots, x_n) \text{ est solution de } \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A & & \vdots \\ & & & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} A \iff \text{le système suivant est compatible : } \left(\begin{array}{ccc|c} & & & y_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & y_p \end{array}\right)$$

Pour déterminer Ker A, il suffit donc de résoudre le système en matrice augmentée ci-dessus (on peut ne faire apparaitre les inconnues $x_1, \cdots, x_n$ que tout à la fin). Pour déterminer Im A, il suffit de trouver d'éventuelles équations de compatibilité à vérifier sur $y_1, \cdots, y_n$. Enfin, comme pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, on a $u_A(X) = AX$, on peut remarquer que :

$$\operatorname{Ker} A = \{X \in \mathbb{K}^n \mid AX = 0_{\mathbb{K}^p}\}$$

$$\operatorname{Im} A = \{AX \mid X \in \mathbb{K}^n\}$$

4 Rang d'une matrice

4.1 Opérations élémentaires

On a vu que les opérations élémentaires étaient de trois types : dilatation, permutation, transvection.

Définition 30.17 – Matrices de dilatation

Dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle <u>matrice de dilatation</u> toute matrice de la forme

$$D_i(\mu) := \begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{ligne } i \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \mu & & & \\ & & & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mu \in \mathbb{K}^*$$
$$\text{col. } i$$

On peut vérifier que $D_i(\mu)$ est inversible avec $D_i(\mu)^{-1} = D_i\left(\dfrac{1}{\mu}\right)$.

Définition 30.18 – Matrice de permutation

Dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle <u>matrice de permutation</u> toute matrice de la forme

$$P_{i,j} := \begin{array}{r} \\ \\ \text{ligne } i \\ \\ \\ \\ \text{ligne } j \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \text{col. } i \qquad\qquad \text{col. } j \end{array} \qquad \text{avec } i \neq j$$

On peut vérifier que $P_{i,j}$ est inversible avec $\quad (P_{i,j})^{-1} = P_{i,j}$.

Définition 30.19

Dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle <u>matrice de transvection</u> toute matrice de la forme

$$T_{i,j}(\lambda) := \begin{array}{r} \\ \\ \text{ligne } i \\ \\ \text{ligne } j \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \text{col. } i \qquad \text{col. } j \end{array} \qquad \text{avec } i \neq j \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

On peut vérifier que $T_{i,j}(\lambda)$ est inversible avec $\quad T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.

Lemme 30.20 – Op. élémentaires et matrices équivalentes

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Une opération élémentaire sur les lignes (resp. les colonnes) de A revient à multiplier A à gauche (resp. à droite) par une matrice :

Op. élém. sur A	Écriture matricielle
$L_i \leftarrow \mu L_i$	$D_i(\mu) \times A$
$L_i \leftrightarrow L_j$	$P_{i,j} \times A$
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$T_{i,j}(\lambda) \times A$

Op. élém. sur A	Écriture matricielle
$C_i \leftarrow \mu C_i$	$A \times D_i(\mu)$
$C_i \leftrightarrow C_j$	$A \times P_{i,j}$
$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$	$A \times T_{i,j}(\lambda)$

En particulier, comme les matrices $D_i(\mu)$, $P_{i,j}$ et $T_{i,j}(\lambda)$ sont toutes inversibles, chacune de ces opérations est "réversible" : il suffit de multiplier par l'inverse de la matrice correspondante pour annuler l'opération.

4.2 Matrices équivalentes

Définition 30.21 – Matrices équivalentes

Soit $A, A' \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On dit que A' est équivalente à A s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que

$$A' = QAP$$

Remarque. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et A, A' deux matrices qui représentent u dans des bases différentes (par exemple $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}{}^{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{B}'}(u)$). Alors A et A' sont équivalentes, cf Théorème 30.12.

Théorème 30.22

La relation “est équivalente à” est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

On pourra en particulier dire que deux matrices sont équivalentes si l'une est équivalente à l'autre.

Théorème 30.23

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Si B est une matrice obtenue à partir d'opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes de A, alors les matrices A et B sont équivalentes.

Démonstration. Supposons que B soit obtenue à partir de A en ayant fait :

- r opérations sur les lignes dont on note $L_1, \cdots, L_r$ les matrices associées (à l'opération n°1, n°2, ..., n°r).
- s opérations sur les colonnes dont on note $C_1, \cdots, C_s$ les matrices associées (à l'opération n°1, n°2, ..., n°s).

Alors

$$B = L_r \cdots L_1 A C_1 \cdots C_s$$

En posant $Q = L_r \cdots L_1 \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P = C_1 \cdots C_s \in GL_n(\mathbb{K})$, on a donc $B = QAP$. D'où A et B sont équivalentes. □

4.3 Résultats théorique sur le rang

Lemme 30.24

Si deux matrices sont équivalentes, alors elles ont le même rang.

Démonstration. Soit $A', A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ deux matrices équivalentes. Alors

$$A' = QAP$$

et donc, en notant $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_p$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$, en notant q, u, p les endomorphismes canoniquement associés à Q, A, P respectivement,

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p}{}^{\mathcal{B}_n}(q \circ u \circ p)$$

Or, comme Q, P sont inversibles, q, p aussi. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\, A' &= \mathrm{rg}\,(q \circ u \circ p) && \text{par définition du rang de } A' \\ &= \mathrm{rg}\, u && \text{car } q \text{ et } p \text{ sont des isomorphismes} \\ &= \mathrm{rg}\, A \end{aligned}$$

où, pour la deuxième égalité, on a utilisé le Théorème 28.31 du chapitre 28 (Applications linéaires, partie A). $\square$

Définition 30.25

On se place dans l'ensemble $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq r \leq \min(n, p)$, on pose

$$J_r := \begin{array}{cc} & \overbrace{\hphantom{1 \ \ddots \ 1}}^{r \text{ colonnes}} \\ r \text{ lignes} \left\{ \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ \ddots \\ 1 \end{matrix}} \right. & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & 1 & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \right) \end{array} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

Lemme 30.26

La matrice J_r est de rang r.

Démonstration. Si on note $u_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ le morphisme canoniquement associé à J_r, et $c_1, \cdots, c_r$ les r premières colonnes de J_r, on remarque que

$$\operatorname{Im} u_r = \operatorname{Vect}(c_1, \cdots, c_r, 0_{n,1}, \cdots, 0_{n,1}) = \operatorname{Vect}(c_1, \cdots, c_r)$$

La famille $(c_1, \cdots, c_r)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ engendre donc $\operatorname{Im} u_r$, et c'est clairement une famille libre (on obtient cette famille par extraction des r premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$). Donc c'est une base de $\operatorname{Im} u_r$, qui est donc de dimension r. D'où $\operatorname{rg} u_r = r$. $\square$

Théorème 30.27

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $r = \operatorname{rg}(A)$. Alors A est équivalente à J_r.
En particulier, étant donné $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang r, il existe une base $\mathcal{B}_E$ de E et une base $\mathcal{B}_F$ de F telles que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u) = J_r$.

Idée générale de la preuve. Par opérations sur les lignes on peut mettre la matrice A sous forme échelonnée réduite et mettre tous ses pivots à 1. Par permutation de colonnes, on peut disposer tous les pivots le long de la "diagonale". Ainsi A est équivalente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & \boxed{1} & * & \cdots & * \\ & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \end{pmatrix}$$

Ensuite, on peut faire des opérations sur les colonnes pour éliminer les étoiles restantes. On arrive donc à une matrice de la forme J_R avec $0 \leq R \leq \min(n, p)$. Comme A et J_R sont équivalentes, elles ont le même rang, ainsi $r = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} J_R = R$. D'où $R = r$ et A est équivalente à J_r. $\square$

Corollaire 30.28

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors A et B sont équivalentes, si et seulement si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.

Démonstration. Sens direct : cela découle du Lemme 30.24. Sens réciproque : si $r = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$, alors par ce qui précède A et B sont toutes deux équivalentes à J_r, donc A et B sont équivalentes par transitivité. □

4.4 Calcul pratique du rang

Pour calculer le rang de A, on pourrait faire des opérations sur les lignes et/ou les colonnes pour se ramener à une matrice de la forme J_r, mais il y a diverses techniques pour ne pas avoir besoin d'aller jusque-là :

Méthode

Pour calculer le rang de A, on peut

- Échelonner A : le rang de A est alors égal au nombre de pivots.
- Faire des opérations sur les lignes et/ou colonnes, pour reconnaitre que les vecteurs colonnes engendrent un s.e.v. de dimension r : alors $\operatorname{rg} A = r$ (cf Lemme 30.29).
- Faire des opérations sur les lignes et/ou colonnes, pour reconnaitre que les vecteurs lignes engendrent un s.e.v. de dimension r : alors $\operatorname{rg} A = r$ (cf Corollaire 30.31).

Lemme 30.29

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ une matrice dont on note $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_n$ les vecteurs colonnes qui la constituent :

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2 & \cdots & \mathcal{C}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Le rang de A est égal à la dimension du s.e.v. engendré par les colonnes de A : $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_n)$.

Démonstration. Soit $u_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ le morphisme canoniquement associé à A. Alors en posant $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a par définition de u_A :

$$u_A(e_1) = \mathcal{C}_1 \qquad \cdots \qquad u_A(e_n) = \mathcal{C}_n$$

Alors, comme $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, on a $\operatorname{Im} u_A = \operatorname{Vect}(u_A(e_1), \cdots, u_A(e_n))$. Ainsi :

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u_A = \dim \operatorname{Vect}(u_A(e_1), \cdots, u_A(e_n)) = \dim \operatorname{Vect}(\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_n)$$

□

Théorème 30.30

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Le rang de A est égal à celui de sa transposée : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top$.

Démonstration. Soit $r = \operatorname{rg} A$. Alors A est équivalente à une matrice $J_r \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$: il existe $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que

$$A = QJ_rP$$

En passant à la transposée, on obtient

$$A^\top = P^\top J_r^\top Q^\top$$

Comme P et Q sont inversibles, les matrices $P^\top$ et $Q^\top$aussi. Ainsi, $A^\top$ est équivalente à $J_r^\top$. Or, on voit facilement que $\operatorname{rg} J_r^\top = r$ ($J_r^\top$ est une matrice de la même forme que J_r mais dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$). Par équivalence de matrices, $\operatorname{rg} A^\top = \operatorname{rg} J_r^\top = r = \operatorname{rg} A$. □

Corollaire 30.31

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ une matrice dont on note $L_1, \cdots, L_p$ les vecteurs colonnes qui la constituent :

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & L_1 & \cdots \\ \cdots & L_2 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & L_p & \cdots \end{pmatrix}$$

Le rang de A est égal à la dimension du s.e.v. engendré par les colonnes de A : $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(L_1, \cdots, L_p)$.

Démonstration. On a $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top$. Or,

$$A^\top = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_1 & L_2 & \cdots & L_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

D'où $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(L_1, \cdots, L_p)$ par le Lemme 30.29. □

Exemple 13. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer (en fonction de a et b) le rang de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ a & b & a \end{pmatrix}$$

5 Trace d'une matrice

5.1 Matrices semblables

Définition 30.32 – Matrices semblables

Soit $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A' est semblables à A s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A' = P^{-1}AP$$

Attention : la notion de matrices semblables ne concerne que les matrices carrées. On aurait pu intervertir P et P^{-1} dans la définition ci-dessus. En effet, A et A' sont semblables si et seulement s'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = QAQ^{-1}$: il suffit en effet de poser $Q = P^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$.

Remarque. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et A, A' deux matrices qui représentent u dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ différentes (i.e. $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$). Alors A et A' sont semblables, cf Théorème 30.13.

Exemple 14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice semblable à λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $A = \lambda I_n$.

Théorème 30.33

Si deux matrices sont semblables, alors elles sont équivalentes. En particulier, elles ont le même rang.

La réciproque est fausse : la matrice $2I_n$ n'est pas semblable à la matrice I_n par l'exemple qui précède. Pourtant, $2I_n$ et I_n sont équivalentes car elles ont le même rang, à savoir n. On peut aussi remarquer que

$$2I_n = QI_nP \qquad \text{avec} \begin{cases} Q = D_1(2)D_2(2)\cdots D_n(2) \in GL_n(\mathbb{K}) \\ P = I_n \in GL_n(\mathbb{K}) \end{cases}$$

Théorème 30.34

La relation "être semblable à" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5.2 Trace d'une matrice

Définition 30.35 – Trace

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit la trace de A comme étant la somme des éléments diagonaux de A :

$$\mathrm{Tr}\, A := A_{11} + A_{22} + \ldots + A_{nn} \quad \in \mathbb{K}$$

Cette notion n'a de sens que pour des matrices carrées !

Exemple 15. $\mathrm{Tr}\, I_n = \ldots\ldots$ et $\mathrm{Tr}\, E_{ij} = \ldots\ldots.$

Théorème 30.36

L'application Tr $: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \operatorname{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{Tr} A + \mu \operatorname{Tr} B$$

Démonstration. Cela vient du fait que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $[\lambda A + \mu B]_{ii} = \lambda A_{ii} + \mu B_{ii}$ □

Théorème 30.37

Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a

$$\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$$

Bien que A et B ne soient pas nécessairement carrées, les matrices AB et BA le sont, et donc prendre leur trace a un sens.

Démonstration.

□

Théorème 30.38

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B$.

Démonstration.

□

En particulier, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et que A, A' sont deux matrices qui représentent u dans des bases différentes, alors on a vu que A, A' sont semblables et donc $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} A'$. Cela permet de justifier la définition suivante.

Définition 30.39

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit la trace de u, notée $\operatorname{Tr} u$, comme étant la trace de toute matrice qui représente u (la trace ne dépend pas de la base choisie).

Théorème 30.40

(On suppose E de dimension finie). Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Alors

$$\operatorname{Tr} p = \operatorname{rg} p$$

Démonstration.

□

Exemple 16. On reprend l'Exemple 11. On avait vu que

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -6 & -7 & -8 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

et que u était un projecteur. On a alors

$$\operatorname{Tr} u = \operatorname{Tr}\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u)\right) = 4 - 7 + 5 = 2$$

Donc u est de rang 2 : c'est un projecteur sur $\operatorname{Im} u$ qui est de dimension 2 (donc parallèlement à $\operatorname{Ker} u$ de dimension 1 par le théorème du rang). Cela correspond bien à ce qu'on a trouvé puisque

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6 Méthodes pour les exercices

On rappelle que E et F sont supposés être de dimension finie.

Méthode

Pour déterminer si un morphisme $u : E \to F$ est inversible et calculer u^{-1}, on peut :

1. Écrire sa matrice dans des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ quelconques, idéalement canoniques.
2. Montrer que cette matrice est inversible. On peut ainsi en déduire la matrice de u^{-1} dans les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$.
3. Ceci permet de déterminer u^{-1} (et ce d'autant plus facilement si $\mathcal{B}_E$ et/ou $\mathcal{B}_F$ est canonique)

Méthode – Changement de base

Pour calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ sachant $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, il faut :

1. Calculer une matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ ou $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ (l'une d'elles est très simple si $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}'$ est canonique).
2. Déterminer l'autre matrice de passage en calculant l'inverse de la première.
3. Calculer le produit $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ pour en déduire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$.

Méthode

Pour calculer le rang de A, on peut

- Échelonner A : le rang de A est alors égal au nombre de pivots.
- Faire des opérations sur les lignes et/ou colonnes, pour reconnaitre que les vecteurs colonnes engendrent un s.e.v. de dimension r : alors $\mathrm{rg}\, A = r$.
- Faire des opérations sur les lignes et/ou colonnes, pour reconnaitre que les vecteurs lignes engendrent un s.e.v. de dimension r : alors $\mathrm{rg}\, A = r$.