Chapitre 29

# Applications linéaires (partie B)

## Plan du chapitre



**Hypothèse**

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$E$ est un $\mathbb{K}$-e.v. ; $F$ et $G$ sont des **s.e.v.** de $E$

## 1 Homothéties

**Définition 29.1**

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \mathrm{id}_E$ est un endomorphisme de $E$ appelé homothétie de rapport $\lambda$.
Si $\lambda \neq 0$, on a $\lambda \mathrm{id}_E \in GL(E)$ et dans ce cas $(\lambda \mathrm{id}_E)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{id}_E$.

## 2 Projecteurs

### 2.1 Éléments caractéristiques d'un projecteur

Rappel : si $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$, on sait que pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

**Définition 29.2 – Projecteur**

On suppose que $E = F \oplus G$. On définit le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$ comme étant l'application :

$$\begin{aligned} p : E &\to E \\ x &\mapsto x_F \qquad\qquad (\text{avec } x = x_F + x_G) \end{aligned}$$

Les s.e.v. $F$ et $G$ sont appelés les éléments caractéristiques du projecteur $p$.

**Remarque.** Soit $p$ le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$.

- Pour tout $x \in F$, on a $p(x) =$ ........ Autrement dit $p|_F =$ .......
- Pour tout $x \in G$, on a $p(x) =$ ........ Autrement dit $p|_G =$ .......

**Exemple 1.** Déterminer l'expression du projecteur $p$ sur $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\right\}$ parallèlement à $G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\right\}$

**Exemple 2.** ◦ L'application nulle $0_{\mathcal{L}(E)}$ est un projecteur sur $\{0_E\}$ parallèlement à $E$.

◦ L'application identité $\mathrm{id}_E$ est un projecteur sur $E$ parallèlement à $\{0_E\}$.

**Théorème 29.3**

On suppose que $E = F \oplus G$. Soit $p$ le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$.

1. $p$ est linéaire, i.e. $p \in \mathcal{L}(E)$.
2. $G = \operatorname{Ker} p$
3. $F = \operatorname{Im} p = \{x \in E \mid p(x) = x\}$

**Remarque.** L'ensemble $\{x \in E \mid p(x) = x\}$ correspond exactement à $\operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ :

$$x \in \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \iff (p - \mathrm{id}_E)(x) = 0_E \iff p(x) - x = 0_E \iff p(x) = x$$

*Démonstration.*

$\square$

**Corollaire 29.4**

Si $p$ est un projecteur, alors ses éléments caractéristiques sont $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$. Plus précisément, $p$ est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.
En particulier, $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

**Méthode**

Pour trouver les éléments caractéristiques d'un projecteur $p$, il suffit donc de déterminer $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$.
Pour $\operatorname{Im} p$, il est plus facile en général de déterminer $\operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$, c'est-à-dire de résoudre $p(x) = x$.

**Attention** à ces deux pièges fréquents :

- Si $u$ est un endomorphisme quelconque de $E$, on ne peut pas, a priori, écrire $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$. Si $E$ est de dimension finie, par le théorème du rang, on a certes $\dim E = \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u$, mais rien ne permet d'affirmer que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0_E\}$. Contre-exemple :

- Quand bien même aurait-on $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$, cela ne suffit pas à conclure que $u$ est un projecteur. Pour trouver un contre-exemple, on aura besoin de la caractérisation qui suit.

## 2.2 Caractérisation d'un projecteur

**Théorème 29.5**

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors $p$ est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

Attention, cette caractérisation n'est valide que si $p \in \mathcal{L}(E)$, notamment il faut que $p$ soit linéaire.

*Démonstration.* **Sens direct** : on suppose que $p$ est un projecteur. On note $F$ et $G$ ses éléments caractéristiques, de sorte que $p$ soit le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$, avec $E = F \oplus G$.

**Sens réciproque** : on suppose que $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$. Montrons que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires puis que $p$ est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

1.

2.

3.

□

**Attention** (suite) : soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$. Cela ne suffit pas à conclure que $u$ est un projecteur. Contre-exemple :

# 3 Symétries

## 3.1 Éléments caractéristiques d'une symétrie

Soit $F$ et $G$ deux s.e.v. supplémentaires de $E$. Alors, on sait que pour tout élément $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

**Définition 29.6 – Symétrie**

On suppose que $E = F \oplus G$. définit la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$ comme étant l'application

$$\begin{aligned} s : E &\to E \\ x &\mapsto x_F - x_G \end{aligned}$$

Les s.e.v. $F$ et $G$ sont appelés les éléments caractéristiques de la symétrie $s$.

**Remarque.** Soit $s$ la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$.

- Pour tout $x \in F$, on a $s(x) = \ldots\ldots$ Autrement dit $s|_F = \ldots\ldots\ldots$
- Pour tout $x \in G$, on a $s(x) = \ldots\ldots$ Autrement dit $s|_G = \ldots\ldots\ldots$

**Exemple 3.** Déterminer l'expression de la symétrie $s$ par rapport à $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$ parallèlement à $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$.

**Exemple 4.**
- L'application $-\mathrm{id}_E$ est une symétrie par rapport à $\{0_E\}$ parallèlement à $E$
- L'application $\mathrm{id}_E$ est une symétrie par rapport à $E$ parallèlement à $\{0_E\}$.

**Théorème 29.7**

Soit $F$ et $G$ deux s.e.v. supplémentaires de $E$ et $s$ la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$. Alors :
- $s$ est linéaire, i.e. $s \in \mathcal{L}(E)$.
- $F = \{x \in E \mid s(x) = x\}$
- $G = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$

En particulier, on peut dire que $F = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E)$

**Corollaire 29.8**

Toute symétrie $s$ est une symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E)$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E)$.
En particulier, $E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E)$.

Contrairement aux projecteurs, ceci définit $s$, et c'est au programme MPSI...

### 3.2 Caractérisation d'une symétrie

**Théorème 29.9**

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors $s$ est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

Dit autrement, $s$ est une symétrie si et seulement si $s$ est une involution linéaire.

**Corollaire 29.10**

Toute symétrie $s$ est un automorphisme, et de plus $s^{-1} = s$.

*Preuve du Théorème 29.9.* **Sens direct** :

**Sens réciproque** : soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = \mathrm{id}_E$. On pose

$$F := \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = x\}$$

$$G := \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$$

Montrons que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$, et que $s$ est la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$.

- Montrons que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $x \in F \cap G$. On a alors

  $$\begin{cases} (s - \mathrm{id}_E)(x) = 0_E \\ (s + \mathrm{id}_E)(x) = 0_E \end{cases} \quad \begin{cases} s(x) - x = 0_E \\ s(x) + x = 0_E \end{cases} \quad \begin{cases} s(x) = x \\ 2x = 0_E \quad L_2 - L_1 \end{cases}$$

  d'où $x = 0_E$. Ainsi, $F \cap G = \{0_E\}$ (l'autre inclusion est évidente).
- Montrons que $F + G = E$. Soit $x \in E$. On pose

  $$x_F = \frac{1}{2}\left(x + s(x)\right) \qquad \text{et} \qquad x_G = \frac{1}{2}(x - s(x))$$

  On a bien sûr $x = x_F + x_G$. De plus, on remarque alors que

  $$\begin{aligned} s(x_F) &= \frac{1}{2}\left(s(x) + s^2(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(s(x) + x\right) \qquad \text{car } s^2 = \mathrm{id}_E \\ &= x_F \end{aligned}$$

  donc $x_F \in F$. On peut montrer également que $s(x_G) = -x_G$, donc $x_G \in G$. Ainsi, $x \in F + G$. D'où $F + G = E$.
- Enfin, montrons que $s$ est la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$. En effet, si $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, on a par ce qui précède :

  $$s(x) = s(x_F) + s(x_G) = x_F - x_G$$

  Donc $s$ est bien la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$.

□

**Exemple 5.** Montrer que l'application

$$\begin{aligned} s: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (y,x) \end{aligned}$$

est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

# 4 Formes linéaires et hyperplans

## 4.1 Formes linéaires (dimension quelconque)

**Définition 29.11 – Forme linéaire**

On appelle forme linéaire sur $E$ toute application linéaire de $E$ dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble des formes linéaires sur $E$, i.e. $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$, est noté $\boxed{E^*}$. Il est appelé espace dual de $E$.

En particulier, $E^*$ est un $\mathbb{K}$-e.v.

**Exemple 6.** L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^2 &\to \mathbb{K} \\ (x,y) &\mapsto 2x+3y \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^2$, i.e. un élément de $(\mathbb{K}^2)^*$.

**Exemple 7.** Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, l'application $P \mapsto P(\alpha)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.

**Remarque.** Si $\varphi \in E^*$, alors ou bien $\varphi = 0_{E^*}$, ou bien $\varphi$ est surjective.

### 4.2 Formes linéaires (dimension finie)

**Théorème 29.12**

Si $E$ est de dimension finie, alors $E^*$ aussi et on a $\dim E^* = \dim E$.

*Démonstration.*

□

Par le Théorème 28.18 du chapitre précédent, pour déterminer entièrement une forme linéaire $\varphi$, il suffit de définir les valeurs des réels $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\cdots$, $\varphi(e_n)$.

**Définition 29.13**

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de $E$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $e_i^* : E \to \mathbb{K}$ l'unique forme linéaire telle que

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La forme linéaire $e_i^* \in E^*$ est appelée forme coordonnée d'indice $i$ selon la base $(e_i)_{1<i<n}$.

Attention ! $e_i^*$ est bien une forme linéaire (élément de $E^*$) alors que $e_i$ est un vecteur de $E$.

**Remarque.** Si $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ est un vecteur de $E$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$e_i^*(x) = e_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_i^*(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{i,j} = \lambda_i$$

Autrement dit, $e_i^*(x)$ est égal à la $i$-ième coordonnée de $x$ selon la base $(e_1, \cdots, e_n)$.

**Théorème 29.14**

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de $E$. Alors $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ est une base de $E^*$, appelée base duale de $(e_1, \cdots, e_n)$.

*Démonstration.*

□

En particulier, toute forme linéaire $\varphi \in E^*$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des $e_i^*$ : il existe un (unique) $n$-uplet $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*$$

**Attention** : la base duale $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ dépend du choix de la base $(e_1, \cdots, e_n)$. Chaque base sur $E$ est associée à une (unique) base duale de $E^*$.

### 4.3 Hyperplans vectoriels (dimension quelconque)

**Définition 29.15 – Hyperplan**

On appelle hyperplan (vectoriel) de $E$ tout s.e.v. de $E$ qui est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Autrement dit, $H$ est un hyperplan de $E$ s'il existe $\varphi \in E^*$ non nulle telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi$. La forme linéaire $\varphi$ n'est pas unique : on a par exemple $H = \operatorname{Ker} \psi$ avec $\psi = 2\varphi \neq \varphi$.

**Définition 29.16 – Équation d'un hyperplan**

Soit $H$ un hyperplan de $E$. On appelle équation de $H$ toute équation de la forme $\varphi(x) = 0$, d'inconnue $x \in E$, avec $\varphi$ une forme linéaire non nulle telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi$.

Autrement dit, puisque $H = \{x \in E \mid \varphi(x) = 0\}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ est une équation qui caractérise les éléments de $H$.

**Exemple 8.** L'ensemble $H = \left\{ f \in \mathscr{C}^0([0,1]) \mid \int_0^1 f = 0 \right\}$ est un hyperplan de $\mathscr{C}^0([0,1])$ : en effet, $H$ est le noyau de la forme linéaire $\varphi : \mathscr{C}^0([0,1]) \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 f$.

**Théorème 29.17**

Soit $H_1$ et $H_2$ deux hyperplans de $E$. On pose $\varphi_1$ et $\varphi_2$ des formes linéaires non nulles telles que $H_1 = \operatorname{Ker} \varphi_1$ et $H_2 = \operatorname{Ker} \varphi_2$. On a $H_1 = H_2$ si et seulement si $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont colinéaires.

Comme $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont non nulles, $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont colinéaires si et seulement si $\varphi_1 = \alpha\varphi_2$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, si et seulement si $\varphi_2 = \beta\varphi_1$ avec $\beta \in \mathbb{K}$ (de plus les scalaires $\alpha$ et $\beta$ peuvent même être supposés non nuls).

**Théorème 29.18 – Caractérisation des hyperplans**

Soit $H$ un s.e.v. de $E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $H$ est un hyperplan de $E$.
2. Il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(x)$.

Comme $x \neq 0_E$, l'ensemble $\mathrm{Vect}(x)$ est une droite vectorielle. En d'autres termes, un hyperplan est un s.e.v. dont il "manque" juste une dimension pour être égal à $E$ tout entier.

**Remarque.** La preuve ci-dessous montre notamment qu'on peut prendre pour $x$ tout vecteur qui n'est pas dans $H$, ou encore tout vecteur tel que $\varphi(x) \neq 0$.

*Démonstration.* On ne montrera que le sens direct.

$\square$

**Exemple 9.** Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que $H = \left\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P'(\alpha) = 0\right\}$ est un hyperplan de $E$ et déterminer une droite vectorielle supplémentaire.

### 4.4 Hyperplan (dimension finie)

**Théorème 29.19**

On suppose $E$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $H$ est un hyperplan de $E$ si et seulement si $\dim H = n-1$.

*Démonstration.*

□

**Théorème 29.20 – Équation d'un hyperplan en dimension finie**

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de $E$, et pour tout vecteur $x$ de $E$, on écrit sa décomposition sur la base $(e_1, \cdots, e_n)$ comme étant $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Pour tout hyperplan $H$ de $E$, il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** tels que l'équation de $H$ soit de la forme

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$$

*Démonstration.*

□

**Remarque.** Ainsi, $H$ est un hyperplan si et seulement s'il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$H = \{x \in E \mid \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0\}$$

où $x_1, \cdots, x_n$ désignent les coordonnées de $x$ dans une base donnée de $E$.

**Exemple 10.** Les ensembles suivants sont des hyperplans de $\mathbb{R}^n$ et en particulier sont de dimension $n-1$ :

$$H = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \ldots + x_n = 0\}$$

$$H' = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 - \ldots + (-1)^n x_n = 0\}$$

**Exemple 11.** Soit $P = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$. Alors les coordonnées de $P$ selon la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ sont $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$. Ainsi, si $H$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$, il existe $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$H = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X] \;\middle|\; \lambda_0 a_0 + \ldots + \lambda_n a_n = 0 \right\}$$

**Remarque.** L'équation d'un hyperplan dépend techniquement de la base $(e_1, \cdots, e_n)$ de $E$ choisie. Mais on prend en générale la base canonique usuelle.

Le Théorème suivant affirme que l'équation d'un hyperplan n'est pas unique : plus spécifiquement elle est unique à constante multiplicative près.

**Théorème 29.21**

On suppose $E$ de dimension finie $n \geq 1$.
Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et $(\lambda'_1, \cdots, \lambda'_n)$ deux $n$-uplets de $\mathbb{K}^n$ non égaux à $0_{\mathbb{K}^n}$. Les hyperplans d'équations respectives (en considérant la même base de $E$)

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i x_i = 0$$

sont confondus si et seulement si les $n$-uplets $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et $(\lambda'_1, \cdots, \lambda'_n)$ sont colinéaires.

*Démonstration.* Soit $H$ un hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$. On peut trouver une forme linéaire $\varphi$ telle que $\varphi(e_1) = \lambda_1$, $\cdots$, $\varphi(e_n) = \lambda_n$, auquel cas

$$H = \left\{ x \in E \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \right\} = \{x \in E \mid \varphi(x) = 0\} = \operatorname{Ker} \varphi$$

et de même l'hyperplan $H'$ d'équation $\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i x_i = 0$ peut être mis sous la forme $H' = \operatorname{Ker} \psi$ avec $\lambda'_1 = \psi(e_1)$, $\cdots$, $\lambda'_n = \psi(e_n)$. Or, $H = H'$ si et seulement si $\varphi$ et $\psi$ sont colinéaires. D'où le résultat. $\square$

**Théorème 29.22**

On suppose $E$ de dimension finie $n \geq 2$. Soit $H_1$ et $H_2$ deux hyperplans de $E$. Alors

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \begin{cases} n-1 & \text{si } H_1 = H_2 \\ n-2 & \text{si } H_1 \neq H_2 \end{cases}$$

Plus généralement, si $m \in \mathbb{N}^*$ et $H_1, \cdots, H_m$ sont des hyperplans de $E$, alors

$$\dim\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_m\right) \geq n - m$$

Il n'y a pas toujours égalité, il se peut que l'intersection de $m$ hyperplans (même distincts) n'abaisse pas de $m$ le degré :

**Théorème 29.23**

On suppose $E$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $F$ un s.e.v. de $E$ de dimension $m < n$. Alors en posant $q = n - m \geq 1$, il existe $q$ hyperplans $H_1, \cdots, H_q$ de $E$ tels que

$$F = \bigcap_{k=1}^{q} H_k$$

**Exemple 12.** Toute droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ peut se représenter par l'intersection de deux (hyper)plans vectoriels de $\mathbb{R}^2$ (non confondus).

**Exemple 13.** Quand on transforme le s.e.v. $D = \mathrm{Vect}((1,2,3))$ sous la forme d'une équation par la méthode du pivot (cf Chapitre 26), on trouve

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathrm{Vect}((1,2,3)) \text{ssi} \quad & \exists \alpha \in \mathbb{R} \qquad (x,y,z) = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha) \\
\text{ssi} \quad & \text{le système suivant admet une solution : } \begin{cases} \alpha = x \\ 2\alpha = y \\ 3\alpha = z \end{cases} \\
\text{ssi} \quad & (\ldots) \quad \text{ssi} \quad y = 2x \text{ et } z = 3x
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$D = \mathrm{Vect}((1,2,3)) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \end{cases} \right\}$$

La droite $D$ peut donc s'écrire comme l'intersection d'un hyperplan d'équation $y = 2x$ et d'un autre d'équation $z = 3x$.

## 5 Méthodes pour les exercices

**Méthode**

Pour déterminer si une application linéaire $p$ est un projecteur, on peut :

- Utiliser la caractérisation.
- Montrer que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires et que : $\forall x \in \operatorname{Im} p \quad p(x) = x$.
- (Justifié en MP) : Montrer que $\operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires.

**Méthode**

Pour déterminer si une application linéaire $s$ est une symétrie, on peut :

- Utiliser la caractérisation.
- (Justifié en MP) : Montrer que $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires.

**Méthode**

Pour déterminer les éléments caractéristiques $F$ et $G$ d'un projecteur $p$ ou d'une symétrie $s$, on utilise les formes “équations” de $F$ et de $G$.