Chapitre 28

Applications linéaires (partie A)

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
E, F et G désignent des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

1 Généralités

1.1 Définition, morphisme d'e.v.

Définition 28.1 – Application linéaire

Une application $f : E \to F$ est dite linéaire si

$$\begin{cases} \forall u, v \in E & f(u+v) = f(u) + f(v) \\ \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall u \in E & f(\alpha u) = \alpha f(u) \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall u, v \in E \qquad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

On dit également que f est un morphisme (d'espaces vectoriels) de E dans F.

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\boxed{\mathcal{L}(E,F)}$.
- Lorsque $F = E$, on note $\boxed{\mathcal{L}(E)} := \mathcal{L}(E,E)$.

Exemple 1. L'application nulle de E dans F est linéaire.

Exemple 2. Montrer que l'application suivante est linéaire :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & 2x - 3y + 6z \end{array}$$

Exemple 3. Les applications suivantes sont linéaires (avec des notations évidentes :)

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

En effet, $f(\alpha P + \beta Q) = $ ....

$$g : \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ \varphi & \mapsto & \int_0^1 \varphi \end{array}$$

En effet, $g(\alpha\varphi + \beta\psi) = $ ....

$$h : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M^\top \end{array}$$

En effet, $h(\alpha M + \beta N) = $ ....

Remarque. Moult opérations vues cette année sont en fait des applications linéaires. En plus de la dérivation (d'un polynôme, d'une fonction), l'intégration, et la transposition vues plus haut, on peut citer l'évaluation en un point, le passage à la limite (d'une fonction, d'une suite), etc.

Théorème 28.2

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

1. $f(0_E) = 0_F$
2. $\forall x \in E \qquad f(-x) = -f(x)$
3. L'image de toute combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad \forall x_1, \cdots, x_n \in E \qquad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Démonstration.

□

Exemple 4.

- L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x + y - 1$ n'est pas linéaire car $f(0,0) = -1 \neq 0$.
- L'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = x^2 + y^2$ n'est pas linéaire car $g(-1,-1) \neq -g(1,1)$, ou encore parce que $g(2(1,1)) = g(2,2) = 8$ alors que $2g(1,1) = 2 \times 2 = 4$.

Définition 28.3 – endo / iso / auto-morphismes

1. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que f est un endomorphisme (de E).
2. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et f est bijective, on dit que f est un isomorphisme (d'e.v.).
3. Si f est un endomorphisme (de E) et un isomorphisme, on dit que f est automorphisme (de E).

Exemple 5. L'application id_E est clairement linéaire de E dans E. On a donc $\mathrm{id}_E \in \mathcal{L}(E)$.
De plus, id_E est bijective, c'est donc un automorphisme de E.

Exemple 6. Parmi les applications f, g et h de l'Exemple 3, lesquelles sont des endomorphismes ? des isomorphismes ? des automorphismes ?

1.2 Opérations sur les morphismes

Rappel : soit Ω un ensemble. Pour toutes applications $f, g \in F^\Omega$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit :

$$\begin{aligned} f+g : \Omega &\to F \\ x &\mapsto f(x)+g(x) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \lambda f : \Omega &\to F \\ x &\mapsto \lambda f(x) \end{aligned}$$

Ces opérations font de F^Ω un e.v. En particulier, avec $\Omega = E$, on en déduit que F^E est un e.v.

Théorème 28.4

Pour tous $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$ et $f,g \in \mathcal{L}(E,F)$, on a $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E,F)$.
Plus généralement, toute combinaison linéaire d'applications linéaires est encore une application linéaire :

$$\forall \lambda_1,\cdots,\lambda_n \in \mathbb{K} \qquad \forall f_1,\cdots,f_n \in \mathcal{L}(E,F) \qquad \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n \in \mathcal{L}(E,F)$$

Corollaire 28.5

$\mathcal{L}(E,F)$ est un s.e.v. de F^E.

Le corollaire découle du Théorème 28.4 par la caractérisation : on a bien $\mathcal{L}(E,F) \subset F^E$ et $0_{F^E} \in \mathcal{L}(E,F)$. Il reste à démontrer le Théorème 28.4.

Démonstration. Soit $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$ et $f,g \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrons que $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E,F)$. Il est clair que $\lambda f + \mu g$ est une application de E dans F. Il suffit donc de montrer que l'application $h := \lambda f + \mu g$ est linéaire.

□

Théorème 28.6 – Stabilité par composition

Toute composée d'applications linéaires est encore une application linéaire.

Dit autrement, si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors l'application $g \circ f$ est linéaire, on a donc $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

Démonstration.

□

Exemple 7. L'application suivante

$$\begin{aligned} \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \varphi'(0) + \int_0^1 \varphi(t^2)dt \end{aligned}$$

est linéaire par somme d'applications linéaires, à savoir

$$\varphi \mapsto \varphi' \quad \text{composée ensuite avec} \quad \psi \mapsto \psi(0)$$

$$\varphi \mapsto \varphi \circ (t \mapsto t^2) \quad \text{composée ensuite avec} \quad \psi \mapsto \int_0^1 \psi$$

Théorème 28.7 – Bilinéarité de la composition d'applications linéaires

Soit $f, f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g, g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F,G)$. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a :

$$(\alpha g_1 + \beta g_2) \circ f = \alpha(g_1 \circ f) + \beta(g_2 \circ f)$$

$$g \circ (\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha(g \circ f_1) + \beta(g \circ f_2)$$

Attention : la première identité est vérifiée même si g_1, g_2 et f ne sont pas linéaires, car par définition, pour toutes applications $g_1, g_2 \in G^F$ et $x \in F$, on a $(\alpha g_1 + \beta g_2)(x) = \alpha g_1(x) + \beta g_2(x)$. En revanche, la seconde identité nécessite que g soit linéaire (mais ce n'est pas nécessaire pour f_1 et f_2).

1.3 Isomorphismes

On rappelle qu'on a montré au chapitre 6 les formules suivantes : si f et g sont des applications bijectives (pas nécessairement linéaires) et si $g \circ f$ a un sens :

- f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = \ldots\ldots\ldots$
- $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = \ldots\ldots\ldots$

Théorème 28.8 – Stabilité par passage à l'inverse

La réciproque d'une application linéaire (lorsqu'elle existe) est également linéaire.

Ainsi, si $f : E \to F$ est un isomorphisme (d'e.v.), sa réciproque $f^{-1} : F \to E$ est également un isomorphisme (d'e.v.).

Démonstration.

□

Sur le même principe, si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des isomorphismes (d'e.v.), alors $g \circ f : E \to G$ est un isomorphisme (d'e.v.), mais c'est un résultat déjà connu de nous : si g et f sont linéaires (resp. bijectives), alors $g \circ f$ est linéaire (resp. bijective).

1.4 Image directe, image réciproque d'un s.e.v.

Re-re-rappel : soit $f : E \to F$ une application quelconque **pas nécessairement inversible / bijective**. Pour toutes parties $A \subset E$ et $B \subset F$ (pas forcéments des s.e.v. !), on pose

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subset F \qquad\qquad f^{-1}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E$$

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A \quad f(x) = y \qquad\qquad x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

Malgré la notation, la définition de $f^{-1}(B)$ ne fait pas intervenir f^{-1} (qui n'existe même pas a priori). Donc :

$$\boxed{\text{L'ensemble } f^{-1}(B) \text{ a un sens même si } f \text{ n'est pas bijective !}}$$

Théorème 28.9

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Pour tout s.e.v. A de E, l'ensemble $f(A)$ est un s.e.v. de F.
- Pour tout s.e.v. B de F, l'ensemble $f^{-1}(B)$ est un s.e.v. de E.

Autrement dit, l'image directe ou réciproque d'un s.e.v. par une application linéaire est encore un s.e.v.

Démonstration.

□

1.5 Noyau d'un morphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L'application f est en particulier un morphisme du groupe $(E, +)$ dans le groupe $(F, +)$. On peut donc définir son noyau comme l'ensemble :

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

Et en particulier, $x \in \operatorname{Ker} f \iff f(x) = 0_F$

Théorème 28.10

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

1. $\operatorname{Ker} f$ est un s.e.v. de E.
2. f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Démonstration.

1. Immédiat car $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0_F\})$ et que $\{0_F\}$ est un s.e.v. de F.
2.

□

Exemple 8. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble suivant est un $\mathbb{R}$-e.v. :

$$F = \left\{ f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \;\middle|\; \alpha f(2) + \beta f'(0) + \gamma \int_0^1 f = 0 \right\}$$

Exemple 9. L'application linéaire de dérivation de polynômes, définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{K}[X] \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

est non injective. En effet, son noyau est $\operatorname{Ker} f = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \neq \{0\}$, où on a noté $0 = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Méthode – Déterminer Ker f

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour déterminer l'ensemble $\operatorname{Ker} f$, on résout l'équation $f(x) = 0_F$ d'inconnue $x \in E$: les solutions sont exactement les vecteurs de $\operatorname{Ker} f$.

Exemple 10. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM - \lambda M$. Déterminer si l'application f est injective ou non selon les valeurs de λ.

1.6 Image d'un morphisme

Définition 28.11

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. L'ensemble image de f est défini par :

$$\operatorname{Im} f = \{y \in F \mid \exists x \in E \quad f(x) = y\} = f(E)$$

Autrement dit, $y \in \operatorname{Im} f \iff \exists x \in E \qquad y = f(x)$

Théorème 28.12

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$

1. $\operatorname{Im} f$ est un s.e.v. de F.
2. f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Démonstration.

1. Immédiat car $\operatorname{Im} f = f(E)$ et que E est un s.e.v. de E.
2. Comme $\operatorname{Im} f = f(E)$,

$$\operatorname{Im} f = F \iff f(E) = F \iff f \text{ surjective} \qquad \text{(cf chapitre 6)}$$

$\square$

Exemple 11. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que l'ensemble suivant est un e.v. :

$$A\mathbb{K}[X] = \{AP \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$

Méthode – Déterminer Im f

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour déterminer l'ensemble $\operatorname{Im} f$, on se donne un "paramètre" $y \in F$ et on étudie l'équation (E_y) : $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$: on aura $y \in \operatorname{Im} f$ ssi (E_y) admet au moins une solution *(il n'est pas nécessaire de l'expliciter, il suffit de montrer qu'il en existe une).*

Cette méthode a déjà été vue dans le chapitre 6 “Applications et relations”, elle n’est donc pas révolutionnaire. Toutefois, comme ici f est linéaire, l’équation $f(x) = y$ pourra se réécrire comme un système linéaire (avec éventuellement une infinité de lignes si F est infini). Or, on sait ce qu’il faut faire pour montrer qu’un système linéaire admet (au moins) une solution sans se fatiguer à la trouver : on échelonne et on trouve des équations de compatibilités sur y (ou plutôt les coordonnées de y).

Exemple 12. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (z - y, x - z, y - x)$. Déterminer Im f.

1.7 Image d’une famille par une application, autre calcul de Im f

Définition 28.13 – Image d’une famille par une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{F} = (e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On définit l’image de $\mathcal{F}$ par f comme étant la famille :

$$f(\mathcal{F}) := (f(e_i))_{i\in I}$$

C’est donc une famille de vecteurs de F.

Exemple 13. Soit $f : \mathbb{K}[X] \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par $f(P) = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$. Alors

$$f(\mathcal{F}) =$$

Théorème 28.14

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E. Alors

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(\mathcal{B})) = \operatorname{Vect}\left(f(e_i)_{i\in I}\right)$$

En particulier, si E est de dimension finie n et si $\mathcal{B} = (e_1,\cdots,e_n)$ est une base de E, alors

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(\mathcal{B})) = \operatorname{Vect}\left(f(e_1),\cdots,f(e_n)\right)$$

Méthode – Déterminer Im f

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour déterminer $\operatorname{Im} f$, on peut se donner une base quelconque $(e_i)_{i\in I}$ de E (en général on prend la base canonique) et obtenir $\operatorname{Im} f$ sous la forme d'un Vect.

Lorsque $\operatorname{Im} f$ est obtenu sous la forme d'un Vect, si E,F sont de dimensions finies, on peut ensuite passer à une forme "équation" de $\operatorname{Im} f$ par des méthodes connues (cf Chapitre 26 – Espaces vectoriels ainsi que l'exemple ci-desssous).

Exemple 14. Déterminer l'image de l'application linéaire :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x-y+z,\, y-z+t,\, x+t) \end{array}$$

2 L'anneau $\mathcal{L}(E)$

Dans le reste du chapitre, pour éviter de futures confusions :

- Les applications linéaires seront en général notées u, v, w au lieu de f, g, h.
- Les vecteurs seront en général notés x, y, z au lieu de u, v, w.
- Les coordonnées des vecteurs seront alors notées $x_1, x_2, x_3, \cdots$, idem pour y et z.

Théorème 28.15

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (non commutatif si $E \neq \{0_E\}$).

Éléments de preuve. L'élément neutre pour $+$ est l'application nulle de E dans E.
Le symétrique de u pour la loi $+$ est l'endormorphisme $x \mapsto -u(x)$, noté $-u$.
L'élément neutre pour $\circ$ est id_E. □

Remarque. En fait, on peut même dire que $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (non commutative si $E \neq \{0_E\}$).

Par ailleurs, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est bijective / un isomorphisme / un automorphisme
2. u admet une application réciproque (dans E^E) : il existe $v : E \to E$ tel que $v \circ u = u \circ v = \mathrm{id}_E$
3. u est symétrisable pour $\circ$ dans $\mathcal{L}(E)$: il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = u \circ v = \mathrm{id}_E$

Dans ce cas, on dira que u est inversible et on notera $u^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ sa réciproque.

Plus généralement, il est fréquent d'utiliser la notation multiplicative pour l'anneau $\mathcal{L}(E)$: la composée $u \circ v$ sera alors notée uv, et en particulier on notera $u^2 = u \circ u$, etc. En particulier :

- $u^0 := \mathrm{id}_E$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u^n := \underbrace{u \circ u \circ \ldots \circ u}_{n \text{ fois}}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si u est inversible, $\quad u^{-n} := \underbrace{u^{-1} \circ u^{-1} \circ \ldots \circ u^{-1}}_{n \text{ fois}}$
- Pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$: $(u^n)^{-1} = (u^{-1})^n = u^{-n}$ et $u^{n+m} = u^n \circ u^m$.

Attention : pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on note typiquement $f^2 : x \mapsto f(x)^2$ avec $f(x)^2 = f(x) \times f(x)$, par exemple $\cos^2$, $\sin^2$, etc. Or, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, l'expression "$u(x) \times u(x)$" n'a *a priori* aucun sens : $u(x)$ est un vecteur de E et la loi $\times$ n'est *a priori* pas définie sur E (c'est juste un e.v.). Ainsi, lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$, il faut comprendre que u^2 représente $u \circ u$ et non $u \times u$.

Théorème 28.16 – Formules du binôme et $a^n - b^n$ (version $\mathcal{L}(E)$)

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

$$\boxed{u \circ v = v \circ u} \implies (u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(u^k \circ v^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k$$

$$\boxed{u \circ v = v \circ u} \implies u^n - v^n = (u-v) \circ \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(u^k \circ v^{n-k-1}\right)\right] = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(u^k \circ v^{n-k-1}\right)\right] \circ (u-v)$$

Rappel : dans un anneau $(A,+,\times)$, l'ensemble des éléments inversibles de A (qu'on avait noté $\mathrm{Inv}(A)$) est un groupe pour la loi $\times$.

Définition 28.17 – Groupe linéaire $GL(E)$

Les éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ sont (par définition) les automorphismes de E.
On note $(GL(E),\circ)$ le groupe des automorphismes de E, dit groupe linéaire de E.

Exemple 15. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 - 2u - 3\mathrm{id}_E = 0$. Montrer que $u \in GL(E)$ et déterminer u^{-1}.

3 Applications linéaires, bases et dimension

3.1 Il en faut peu pour connaitre une application linéaire

Théorème 28.18 – Caractérisation de u par $u(\mathcal{B})$

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille *quelconque* de vecteurs de F. Alors il existe une *unique* application linéaire u de E dans F telle que

$$\forall i \in I \qquad u(e_i) = f_i$$

Ainsi, pour connaitre ou définir une application linéaire, il suffit de connaitre ou définir son image sur les vecteurs d'une base quelconque de l'ensemble de départ.

Preuve partielle du Théorème 28.18. On ne prouvera que l'unicité dans le cas où E est de dimension finie, notée n. On peut ainsi prendre $I = [\![1,n]\!]$. On suppose donc :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad u(e_i) = f_i$$

Preuve de l'unicité.

$\square$

Exemple 16. Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

- Il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_2[X])$ telle que $(u(1), u(X), u(X^2)) = (0, 1, 2X)$. On peut la réexprimer plus simplement par $u : P \mapsto P'$.
- Il existe une (unique) application $v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_2[X])$ telle que $(v(1), v(X), v(X^2)) = (0, 1, 2X+4)$. Étant donné $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$, on a alors

Corollaire 28.19

Si deux applications linéaires coïncident sur une base, alors elles sont égales.

Théorème 28.20 – Caractérisation de u par ses restrictions à des s.e.v. supplémentaires

Soit A et B deux s.e.v. tels que $E = A \oplus B$. Soit $v : A \to F$ et $w : B \to F$ des applications linéaires données. Alors il existe une *unique* application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$u|_A = v \qquad \text{et} \qquad u|_B = w$$

Ainsi, pour connaitre ou définir une application linéaire, il suffit de connaitre ou définir ses restrictions sur deux s.e.v. supplémentaires.

3.2 Application linéaire et famille libre et/ou génératrice

Théorème 28.21

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. u est injective si et seulement si la famille $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est libre.
2. u est surjective si et seulement si la famille $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est génératrice de F.
3. u est bijective si et seulement si la famille $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est une base de F.

En particulier, si E et F sont de dimensions finies différentes, aucune application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ n'est bijective.

Démonstration.

1. **Sens direct :** supposons u injective, montrons que $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est libre. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_n u(e_n) = 0_F \\
\Longrightarrow\ & u(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) = 0_F = u(0_E) && \text{par linéarité de } u \\
\Longrightarrow\ & \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0_E && \text{car } u \text{ est injective} \\
\Longrightarrow\ & \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 && \text{car } (e_1, \cdots, e_n) \text{ est une famille libre}
\end{aligned}$$

Donc la famille $(u(e_1),\cdots,u(e_n))$ est libre.

2. **Sens direct :** on suppose u surjective. Montrons que $(u(e_1),\cdots,u(e_n))$ est génératrice de F. Soit $y \in F$. Comme u est surjective, il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$. On décompose x selon la base $(e_1,\cdots,e_n)$:

$$x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$$

Alors

$$y = u(x) = \lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_n u(e_n)$$

Ainsi, $y \in \mathrm{Vect}\,(u(e_1),\cdots,u(e_n))$. Par abitraire sur y, on a $F \subset \mathrm{Vect}\,(u(e_1),\cdots,u(e_n))$. L'autre inclusion est évidente. Ainsi, $(u(e_1),\cdots,u(e_n))$ est génératrice de F.

3. Cette assertion découle des deux premières.

□

3.3 Propriétés des applications linéaires lorsque $\dim E = \dim F$

Théorème 28.22

On suppose que E et F sont de **même dimension finie**. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors

$$u \text{ est injective} \quad \text{ssi} \quad u \text{ est surjective} \quad \text{ssi} \quad u \text{ est bijective}$$

Démonstration. On note $n = \dim E = \dim F$. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On remarque que $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est une famille de F qui possède n éléments, soit autant que la dimension de F. Ainsi :

$(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est libre		u est injective
ssi $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est génératrice de F	donc par le Théorème 28.21	ssi u est surjective
ssi $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est une base de F		ssi u est bijective

□

Théorème 28.23 – Être inversible d'un côté suffit

On suppose que E et F sont de **même dimension finie**. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est bijective
2. Il existe $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $v \circ u = \mathrm{id}_E$.
3. Il existe $w \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $u \circ w = \mathrm{id}_F$.

Et dans ce cas, $v = w = u^{-1}$.

Démonstration. Il est clair que 1 implique 2 et 3 en posant $v = u^{-1}$ et $w = u^{-1}$. On va montrer que les assertions 2 et 3 entrainent 1.

- Montrons que l'assertion 2 entraine que u est injectif, ce qui permettra de déduire que u est bijectif par le Théorème 28.22.

- Montrons que l'assertion 3 entraine que u est surjectif, ce qui permettra de déduire que u est bijectif par le Théorème 28.22.

Enfin, sachant que u est bijective, il faut montrer que si $v \circ u = \mathrm{id}_E$ alors $v = u^{-1}$. Pour cela, on peut composer à droite par u^{-1} et obtenir $v = u^{-1}$. De même $u \circ w = \mathrm{id}_F$ entraine $w = u^{-1}$. □

3.4 Espaces isomorphes

Définition 28.24

E et F sont dit <u>isomorphes</u> s'il existe un isomorphisme $u : E \to F$. On note alors $E \simeq F$.

Théorème 28.25

On suppose que E est de dimension finie. Alors $E \simeq F$ si et seulement si $\dim E = \dim F$ (ce qui sous-entend que F est de dimension finie).

Démonstration. Sens direct : supposons $E \simeq F$ et notons $u : E \to F$ un isomorphisme. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Alors par le Théorème 28.21, comme u est bijectif, la famille $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est une base de F. Donc F est de dimension finie et $\dim F = n = \dim E$.

Sens réciproque : on suppose $\dim E = \dim F = n$. On pose $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \cdots, f_n)$ une base de F. Par le Théorème 28.18, on pose $u \in \mathcal{L}(E, F)$ l'application telle que $u(e_i) = f_i$. En particulier, l'image de la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ par u est une base de F. Par le Théorème 28.21, u est bijective donc un isomorphisme, d'où $E \simeq F$. □

Corollaire 28.26

Tout $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. $\dim \mathbb{K}^n = n$ et deux e.v. de même dimension finie sont isomorphes par ce qui précède. □

Théorème 28.27

On suppose E et F de dimension finies. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$$

Démonstration. On pose $n = \dim E$. On va montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ et F^n sont isomorphes, donc de même dimension. Cela permettra de conclure car $\dim F^n = n \dim F = \dim E \times \dim F$. Pour cela on pose :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}(E, F) &\to F^n \\ u &\mapsto (u(e_1), \cdots, u(e_n)) \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que φ est un isomorphisme. On peut facilement vérifier que φ est linéaire. Montrons que φ est bijective. Par le Théorème 28.18, on a

$$\forall (f_1, \cdots f_n) \in F^n \qquad \exists ! u \in \mathcal{L}(E, F) \qquad \underbrace{\begin{cases} u(e_1) = f_1 \\ \vdots \\ u(e_n) = f_n \end{cases}}_{\varphi(u) = (f_1, \cdots, f_n)}$$

Ce qui signifie exactement que φ est bijective. Donc φ est un isomorphisme. □

4 Le théorème du rang

4.1 Rang (d'une famille, d'une application)

Définition 28.28 – Rang d'une famille de vecteurs

Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. On définit le rang de la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ par :

$$\operatorname{rg}(x_1, \cdots, x_n) := \dim (\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

Plus généralement, étant donné $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E, si l'ensemble $\operatorname{Vect}(x_i)_{i \in I}$ est de dimension finie, on définit le rang de la famille $(x_i)_{i \in I}$ par :

$$\operatorname{rg}(x_i)_{i \in I} := \dim (\operatorname{Vect}(x_i)_{i \in I})$$

Remarque. La famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ engendre $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, et en particulier la dimension de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est toujours finie et majorée par n. Donc :

$$\mathrm{rg}\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq n$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre.

Exemple 17. Soit $\mathcal{F} = (\ (1,-1,0),\ (3,5,4),\ (6,-4,1),\ (0,-6,-3)\ )$.
On montre que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 2z\right\}$. Ainsi $\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})) = 2$.

Définition 28.29 – Rang d'une application linéaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On dit que u est <u>de rang fini</u> si $\mathrm{Im}\,u$ est de dimension finie. On appelle alors <u>rang de u</u> l'entier

$$\mathrm{rg}\,u := \dim(\mathrm{Im}\,u) \in \mathbb{N}$$

Exemple 18. Déterminer le rang de l'application linéaire :

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z,t) \mapsto (x-y+z, y-z+t, x+t) \end{aligned}$$

Théorème 28.30 – Inégalités sur le rang

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. Si F est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\mathrm{rg}\,u \leq \dim F$, avec égalité ssi u est surjective.
2. Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\mathrm{rg}\,u \leq \dim E$, avec égalité ssi u est injective.

Démonstration.

□

4.2 Premiers résultats sur le rang

Théorème 28.31 – Composer par un isomorphisme ne modifie pas le rang

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang fini.

1. Pour tout isomorphisme $\varphi : F \to G$, l'application $\varphi \circ u$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(\varphi \circ u) = \operatorname{rg} u$
2. Pour tout isomorphisme $\varphi : G \to E$, l'application $u \circ \varphi$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(u \circ \varphi) = \operatorname{rg} u$

Théorème 28.32

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ deux morphismes de rangs finis. Alors $v \circ u$ est de rang fini et

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$$

4.3 Théorème du rang

Lemme 28.33

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E. Alors $u|_S$ est un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$.

Démonstration. Soit donc S tel que $\operatorname{Ker} u \oplus S = E$. On considère l'application

$$\begin{aligned} \widetilde{u} : S &\to \operatorname{Im} u \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

Montrons que $\widetilde{u}$ est un isomorphisme. Il est clair que $\widetilde{u}$ est linéaire.

- Montrons que v est injective. Soit $x \in E$. Comme $\widetilde{u}$ est définie sur S :

  $$x \in \operatorname{Ker} \widetilde{u} \iff x \in S \text{ et } u(x) = 0 \iff x \in S \cap \operatorname{Ker} u \iff x = \{0_E\}$$

  D'où $\operatorname{Ker} \widetilde{u} = \{0_E\}$: $\widetilde{u}$ est injective.
- Montrons que $\widetilde{u}$ est surjective. Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Alors il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$. On décompose alors x en

  $$x = x_K + x_S \qquad \text{avec} \quad (x_K, x_S) \in (\operatorname{Ker} u) \times S$$

  Alors, $y = u(x) = u(x_K) + u(x_S) = u(x_S)$. Ainsi, $\tilde{u}(x_S) = y$. Par arbitraire sur y, $\widetilde{u}$ est surjective.

□

Théorème 28.34 – Théorème du rang

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, avec E de dimension finie. Alors u est de rang fini et

$$\boxed{\dim E = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg} u} \qquad = \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u)$$

Ce théorème ne suppose pas que F soit de dimension finie !

Démonstration.

□

5 Méthodes pour les exercices

Méthode

Voici de nouvelles méthodes pour montrer qu'un ensemble X est un s.e.v. :

- Montrer que X est un noyau ou l'image d'une application linéaire f.
- Plus rarement que $X = f(A)$ ou $X = f^{-1}(B)$ avec f une application linéaire et A, B des s.e.v.

Méthode

Pour montrer qu'une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est injective, on peut montrer que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Pour montrer qu'une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est surjective, on peut :

- Si F est de dimension finie, calculer le rang de f, notamment en calculant la dimension de $\operatorname{Vect}(f(\mathcal{B}))$ avec $\mathcal{B}$ une base de E.
- Montrer que $\operatorname{Im} f = F$.

Méthode

Quand on raisonne sur une application linéaire $f : E \to F$ avec E de dimension finie, il est essentiel d'avoir en tête le théorème du rang :

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$$

Méthode

Pour montrer qu'une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est un isomorphisme, avec E et F de dimensions finies, on peut :

- Montrer que f est injective et que $\dim E = \dim F$.
- Montrer que f est surjective et que $\dim E = \dim F$.