Chapitre 27

Dimension d'un espace vectoriel

Plan du chapitre

Hypothèse

> Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
> E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Préliminaires

1.1 Espace de dimension finie

On rappelle qu'une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un ensemble E correspond en fait à une application

$$\begin{aligned} a : I &\to E \\ i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

Par exemple, une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de réels indexé par $\mathbb{N}$ et correspond donc à une application $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 27.1 – Cardinal d'une famille

Soit $\mathcal{F} = (a_i)_{i\in I}$ une famille indexée par un ensemble I.

- Si I est **fini**, on dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est finie. De plus, on appelle cardinal (ou taille) de la famille le nombre d'éléments de I, et on note ce nombre

$$\operatorname{card}(\mathcal{F}) \qquad \text{ou encore} \qquad \operatorname{card}\left((a_i)_{i\in I}\right)$$

- Si I est infini, on dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est infinie.

Attention : le cardinal de $(a_i)_{i\in I}$ ne dépend pas des valeurs prises par les éléments a_i. Même s'ils sont tous égaux, chacun compte pour un élément de plus pour le cardinal.

Exemple 1. Le cardinal de la famille $(0,0,0)$ est 3.

Exemple 2. Le cardinal de $(X^k)_{0\leq k\leq n}$ est ......

Exemple 3. La famille $(x \mapsto x^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}}$ est infinie.

Définition 27.2 – Dimension finie

E est dit de dimension finie si E possède une famille génératrice finie.

Sinon, on dit que E est de dimension infinie.

Dit autrement, E est de dimension finie s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \cdots, x_n \in E$ tels que $E = \operatorname{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$. Attention, plusieurs valeurs de n sont possibles : par exemple si $E = \operatorname{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$ avec n vecteurs, on peut aussi écrire

$$E = \operatorname{Vect}(\underbrace{x_1, x_1, x_1, x_2, \cdots, x_n}_{n+2 \text{ vecteurs}})$$

En particulier, on ne peut pas encore affirmer que E est de "dimension n" (cf section 2 pour la définition précise).

1.2 Théorèmes de la base incomplète, de la base extraite

Les deux théorèmes suivants sont admis : leur preuve est faisable si E est de dimension finie, mais en dimension infinie, cela nécessite l'axiome du choix.

Théorème 27.3 – Théorème de la base extraite (admis)

De toute famille génératrice de E, on peut "extraire" une base de E.

En d'autres termes, si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E, on peut obtenir une base de E en enlevant à la famille $\mathcal{G}$ un certain nombre de vecteurs (zéro, un ou plusieurs).

Exemple 4. La famille $\mathcal{F} = ((1,0), (0,1), (1,1), (2,2))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$ car ce n'est pas une famille libre. Toutefois $\mathcal{F}$ est une famille génératrice, et on va donc pouvoir en extraire une base de $\mathbb{R}^2$. Dans les trois cas suivants, obtient-on une base de $\mathbb{R}^2$?

- Si on enlève les vecteurs $(1,1)$ et $(2,2)$ de $\mathcal{F}$, alors ....
- Si on enlève les vecteurs $(1,0)$ et $(2,2)$ de $\mathcal{F}$, alors ....

∘ Si on enlève les vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$ de $\mathcal{F}$, alors ....

Exemple 5. Si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors $\mathcal{B}$ est en particulier une famille génératrice et on peut en extraire une base en lui enlevant ... zéro vecteur !

Théorème 27.4 – Théorème de la base incomplète (admis)

Toute famille libre de E peut être "complétée" en une base de E.

En d'autres termes, si $\mathcal{L}$ est une famille libre, on peut obtenir une base de E en ajoutant à $\mathcal{L}$ un certain nombre de vecteurs de E (zéro, un ou plusieurs).

Exemple 6. Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $((1,-1))$ est libre. On peut la compléter de bien des manières en une base de $\mathbb{R}^2$: on peut lui ajouter le vecteur $(1,0)$, ou encore le vecteur $(0,1)$, etc. Toutefois, cela ne fonctionne pas avec le vecteur $(-2,2)$, ou encore le vecteur $(0,0)$ car la famille obtenue serait liée.

Exemple 7. Si $\mathcal{B}$ est une base de E, c'est en particulier une famille libre et on peut compléter $\mathcal{B}$ en une base en lui ajoutant ... zéro vecteur !

Remarque. Le théorème de la base extraite, tout comme le théorème de la base incomplète, ne nous disent pas quels vecteurs il faut ajouter et/ou enlever pour obtenir une base. On sait juste que ces vecteurs existent !

1.3 Théorème de la dimension pour les e.v.

Théorème 27.5 – Théorème de la dimension pour les e.v.

On suppose que E est de dimension finie. Le cardinal de toute famille libre est plus petit que le cardinal de toute famille génératrice. Autrement dit, si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E et que $\mathcal{L}$ est une famille (de E) libre, alors :

$$\mathrm{card}(\mathcal{L}) \leq \mathrm{card}(\mathcal{G})$$

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe une famille génératrice $\mathcal{G}$ et une famille libre $\mathcal{L}$ avec $\mathrm{card}(\mathcal{L}) > \mathrm{card}(\mathcal{G})$. On pose : $m = \mathrm{card}(\mathcal{G}) \in \mathbb{N}^*$, $n = \mathrm{card}(\mathcal{L})$, ainsi que :

$$\mathcal{G} = (g_1, \cdots, g_m) \qquad \mathcal{L} = (\ell_1, \cdots, \ell_n)$$

On sait que $n \geq m+1$, et on enlève à $\mathcal{L}$ ses derniers vecteurs jusqu'à obtenir la famille notée

$$\mathcal{L}' = (\ell_1, \cdots, \ell_{m+1})$$

Puisque $\mathcal{L}$ est libre, on sait que $\mathcal{L}'$ est également libre. Comme $\mathcal{G}$ est génératrice, il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tels que

$$\ell_1 = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_m g_m \quad (*)$$

Si tous les coefficients $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ étaient nuls, on aurait $\ell_1 = 0$, ce qui contredirait le fait que $\mathcal{L}'$ soit libre. Donc $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \neq (0, \cdots, 0)$, et quitte à changer l'ordre des vecteurs de $\mathcal{G}$, on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$. Alors

$$g_1 = \frac{1}{\alpha_1}\ell_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}g_2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1}g_m \quad (**)$$

Avec la relation $(**)$, toute combinaison linéaire de $g_1, \cdots, g_m$ peut se réécrire comme une combinaison linéaire de $\ell_1, g_2, g_3, \cdots, g_m$ et réciproquement avec la relation $(*)$. Ainsi :

$$E = \mathrm{Vect}(g_1, g_2, \cdots, g_m) = \mathrm{Vect}(\ell_1, g_2, \cdots, g_m)$$

Procédons par récurrence pour montrer que pour tout $k \in [\![1, m]\!]$:

$$E = \mathrm{Vect}(\ell_1, \cdots, \ell_k, g_{k+1}, \cdots, g_m)$$

Cette assertion est vraie pour $k = 1$ par ce qui précède. Supposons que cette assertion soit vraie pour un $k \in [\![1, m-1]\!]$, et montrons qu'elle l'est encore au rang $k+1$. Par hypothèse de récurrence, la famille $\ell_1, \cdots, \ell_k, g_{k+1}, \cdots, g_m$ est génératrice, donc il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tels que

$$\ell_{k+1} = \alpha_1 \ell_1 + \ldots + \alpha_k \ell_k + \alpha_{k+1} g_{k+1} + \ldots + \alpha_m g_m \qquad (***)$$

Si on avait $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_m = 0$, on aurait

$$\ell_{k+1} = \alpha_1 \ell_1 + \ldots + \alpha_k \ell_k$$

et donc ℓ_{k+1} serait une combinaison linéaire de $\ell_1, \cdots, \ell_k$, d'où $\mathcal{L}'$ serait liée, ce qui est impossible par hypothèse. Donc $(\alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_m) \neq (0, \cdots, 0)$ et quitte à changer l'ordre de $\mathcal{G}$, on peut supposer $\alpha_{k+1} \neq 0$. Alors,

$$\alpha_{k+1} g_{k+1} = -\alpha_1 \ell_1 - \ldots - \alpha_k \ell_k + \ell_{k+1} - \alpha_{k+2} g_{k+2} - \ldots - \alpha_m g_m \qquad (****)$$

et en divisant par α_{k+1}, on trouve que g_{k+1} est une combinaison linéaire de $\ell_1, \cdots, \ell_{k+1}, g_{k+2}, \cdots, g_m$. En utilisant $(***)$ et $(****)$, avec un argument similaire à ce qui précède, on a donc

$$\begin{aligned} E &= \mathrm{Vect}(\ell_1, \cdots, \ell_k, g_{k+1}, g_{k+2}, \cdots, g_m) \\ &= \mathrm{Vect}(\ell_1, \cdots \ell_k, \ell_{k+1}, g_{k+2}, \cdots, g_m) \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vérifiée pour tout $k \in [\![1, m]\!]$. En particulier, pour $k = m$, on obtient

$$E = \mathrm{Vect}(\ell_1, \cdots, \ell_m)$$

Comme ℓ_{m+1} est un vecteur de E, on en déduit que $\ell_{m+1} \in \mathrm{Vect}(\ell_1, \cdots, \ell_m)$, donc que la famille $\mathcal{L}' = (\ell_1, \cdots, \ell_{m+1})$ est liée. Contradiction. D'où le résultat. $\square$

2 Dimension d'un e.v.

2.1 Définition et exemples

Théorème 27.6

Tout e.v. (de dimension finie ou non) possède des bases.

Si E est un e.v. de dimension finie, toutes ses bases ont le même cardinal : cet entier (positif) est appelé la dimension de E, et est noté $\dim E$.

Remarque. On a le droit d'écrire "$\dim E$" uniquement si E est de dimension finie. Aucune formule où apparait "$\dim E$" (ou "$\dim F$" ou "$\dim G$") n'est valable si un de ces espaces est de dimension infinie.

Démonstration. La première assertion résulte du théorème de la base incomplète : il suffit de prendre une famille libre quelconque de l'e.v. (par exemple une famille contenant un seul vecteur non nul) et de la compléter en une base. Cette preuve ne marche pas lorsque l'e.v. est $\{0_E\}$, mais ce cas est réglé par une convention (cf plus bas).

$\square$

Exemple 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'e.v. $\mathbb{K}^n$ admet pour base (canonique)

$$\mathcal{B} = \Big(\quad (1,0,0,\cdots,0), \quad (0,1,0,\cdots,0), \quad (0,0,\cdots,0,1) \quad \Big)$$

Ainsi, $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie et $\boxed{\dim \mathbb{K}^n = n}$.

Exemple 9. $\mathbb{K}_n[X]$ admet pour base (canonique) la famille $(1, X \cdots, X^n)$, donc $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie et

$$\boxed{\dim \mathbb{K}_n[X] = \qquad\qquad}$$

Remarque. Un ensemble E peut être en même temps un $\mathbb{C}$-e.v. et un $\mathbb{R}$-e.v. et admettre des dimensions différentes dans chacun des cas. La dimension de E vu comme un $\mathbb{C}$-e.v. est en général notée $\dim_{\mathbb{C}} E$ tandis que la dimension de E vu comme un $\mathbb{R}$-e.v. est en général notée $\dim_{\mathbb{R}} E$.

Exemple 10. On sait que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-e.v. mais $\mathbb{C}$ est aussi un $\boxed{\mathbb{R}}$-e.v.

- Si $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{C}$-e.v. alors $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ et toute famille (z) avec $z \in \mathbb{C}^*$ est une base de $\mathbb{C}$
- Si $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{R}$-e.v. alors $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$: en effet, tout complexe z s'écrit de manière unique sous la forme

  $$z = a \times 1 + b \times i \qquad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}$$

  Ainsi, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Remarque. Par convention, la famille vide ( ) est libre et comme $\text{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$, elle constitue une base de $\{0_E\}$. Ainsi, $\{0_E\}$ est de dimension finie et $\boxed{\dim\{0_E\} = 0}$. C'est le seul s.e.v. de E à être de dimension nulle.

Exemple 11. Pour tout $u \in E$, le s.e.v. $\mathbb{K}u := \text{Vect}(u)$ est de dimension finie et $\dim(\mathbb{K}u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \neq 0_E \\ 0 & \text{si } u = 0_E \end{cases}$

Plus généralement, un e.v. de dimension 1 est appelé une <u>droite vectorielle</u> (il peut s'écrire $\mathbb{K}u$ avec $u \neq 0_E$).

Exemple 12. Pour tous vecteurs $u, v \in E$ **non colinéaires**, le s.e.v. $\text{Vect}(u, v)$ est de dimension 2.
Un e.v. de dimension 2 est appelé un <u>plan vectoriel</u>.

2.2 Exemple important : dimension et base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Rappel : pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on définit le symbole de Kronecker par

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Rappel : soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on définit la matrice élémentaire d'indice (i, j) par :

$$E^{ij} := \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & & & 0 & & & \mathbf{0} \\ & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & \vdots & & & \\ \mathbf{0} & & & & & 0 & & & \mathbf{0} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \hphantom{0} & & & & & \text{colonne } j & & & \end{matrix} & \end{array}$$

Exemple 13. Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, il y a 6 matrices élémentaires :

$$E^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 27.7

Toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} E^{ij}$$

Corollaire 27.8

Dans l'e.v. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille des matrices élémentaires $(E^{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ forme une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

En particulier, $\boxed{\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \qquad}$ et $\boxed{\dim \mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) = \qquad}$.

Démonstration. Par la Théorème 27.7, la famille (E^{ij}) est trivialement génératrice. Montrons qu'elle est libre. Soit $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une famille de scalaires.

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda_{i,j} E^{ij} = 0_{n,p} \implies \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \cdots & \lambda_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \cdots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix} = 0_{n,p}$$
$$\implies \forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!] \qquad \lambda_{i,j} = 0$$

Donc la famille (E^{ij}) est une base. D'où le résultat. □

2.3 Dimension de $E \times F$

Théorème 27.9

Si E, F sont de dimension finie, alors $E \times F$ aussi et

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$$

Et par induction, $\dim(E_1 \times \ldots \times E_p) = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$.

La preuve s'appuie sur le fait que si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E et si $(f_1, \cdots, f_p)$ est une base de F, alors la famille

$$(e_1, 0) \qquad (e_2, 0) \qquad \cdots \qquad (e_n, 0) \qquad (0, f_1) \qquad (0, f_2) \qquad \cdots \qquad (0, f_p)$$

est une base de $E \times F$ (la preuve est simple et laissée en exercice).

Exemple 14. On retrouve que $\dim \mathbb{K}^n = \dim(\underbrace{\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{\dim \mathbb{K} + \ldots + \dim \mathbb{K}}_{n \text{ fois}} = n \dim \mathbb{K} = n$

2.4 Famille libre, famille génératrice et dimension

Théorème 27.10 – VIT – Very Important Theorem !

On suppose que E est de dimension finie égale à n. Alors :

1. Toute famille **libre** possède **au plus** n éléments. De plus, si elle possède exactement n éléments, c'est une base.
2. Toute famille **génératrice** possède **au moins** n éléments. De plus, si elle possède exactement n éléments, c'est une base.

Démonstration. Montrons que toute famille libre possède au plus n éléments et que toute famille génératrice possède au moins n éléments.

Sur le même principe et avec le théorème de la base extraite (Théorème 27.3), on montre que toute famille génératrice à n éléments est une base. □

Exemple 15. Montrer que la famille

$$\mathcal{F} = \Big((1,1,1), (0,1,1), (0,0,1) \Big)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 16. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille

$$\mathcal{F} = \left((X-\alpha)^k\right)_{0\leq k\leq n}$$

est une base de $\mathbb{K}_n\left[X\right]$.

Par le théorème de la base incomplète, si on dispose d'une famille libre, on peut la compléter en une base de E. Si E est de dimension finie égale à n, il suffit d'ajouter à la famille un vecteur à la fois, *en s'assurant que la famille reste libre*, et ce jusqu'à avoir une famille ayant n éléments. Par le VIT, cette famille, sera automatiquement une base de E.

Pour s'assurer que la famille reste libre, il faut que chaque vecteur ajouté ne soit pas une combinaison linéaire des précédents.

Exemple 17. Dans l'e.v. $\mathbb{R}^3$, la famille à un seul vecteur $\mathcal{F}_1 = ((1,-1,0))$ est libre. Compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^3$.

Dans l'exemple ci-dessus, nous aurions pu compléter $\mathcal{F}_1$ de bien des manières. On aurait pu par exemple ajouter $(1,1,0)$ en deuxième vecteur, ou encore $(3,3,0)$, etc.

3 Dimension et s.e.v.

3.1 Dimension d'un s.e.v.

Théorème 27.11

On suppose E de dimension finie. Alors tout s.e.v. F de E est de dimension finie et

$$\dim F \leq \dim E$$

De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Démonstration.

$\square$

Méthode

Pour montrer que deux e.v. F et G de dimension finie sont égaux, il suffit de montrer une inclusion et l'égalité des dimensions :

$$\begin{cases} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{cases} \implies F = G$$

En particulier, cela marche aussi lorsque F et G sont deux s.e.v. (de dimension finie) d'un e.v. E.

Exemple 18. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, les s.e.v. suivants sont égaux :

$$F = \text{Vect}\left((1,2,-3),(-3,2,1)\right) \qquad G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\}$$

Exemple 19. Dans l'exemple précédent, montrer que $\dim G = 2$ sans expliciter de base de G.

3.2 Base adaptée à une décomposition

Définition 27.12 – Base adaptée à une décomposition en s.e.v. supplémentaires

Soit F, G deux s.e.v. supplémentaires de E, càd tels que $F \oplus G = E$. On dit qu'une base $\mathcal{B}$ de E est adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ si tout vecteur de $\mathcal{B}$ est un élément de F ou de G.

Exemple 20. On peut vérifier que $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont des s.e.v. supplémentaires de $\mathbb{C}$. La base $(1, i)$ est adaptée à la décomposition $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ car $1 \in \mathbb{R}$ et $i \in i\mathbb{R}$. Il en va de même pour la base $(i, -1)$... En revanche, $(1, j)$ est une base de $\mathbb{C}$ qui n'est pas adaptée à cette décomposition car $j \notin \mathbb{R}$ et $j \notin i\mathbb{R}$.
Dans la définition ci-dessus, tout vecteur de $\mathcal{B}$ est en fait *ou bien* dans F, *ou bien* dans G : si un vecteur u de $\mathcal{B}$ appartenait à F *et* à G, on aurait $u \in F \cap G$, donc $u = 0_E$ car F et G sont supplémentaires. Ainsi, $\mathcal{B}$ contient le vecteur nul 0_E, ce qui en fait une famille liée. Ce n'est donc pas une famille libre, donc pas une base. Contradiction.

Théorème 27.13 – Base de E par concaténation de bases de s.e.v. supplémentaires

On suppose que E est de dimension finie n. Soit F et G deux s.e.v. **supplémentaires** de bases respectives $(f_1, \cdots, f_p)$ et $(g_1, \cdots, g_q)$. La famille

$$\mathcal{B} := (f_1, \cdots, f_p, g_1, \cdots, g_q)$$

est une base de E (qui est adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$).

Autrement dit, lorsqu'on dispose de deux s.e.v. supplémentaires dans E, on peut concaténer leurs bases pour former une base de E. Il est essentiel pour cela que les s.e.v. F et G soient supplémentaires.

Démonstration.

$\square$

Remarque temporaire (*À ignorer une fois que le Théorème 27.18 sera vu*) Le Théorème 27.13 a une autre conséquence. $\mathcal{B}$ étant une base de E, on a $\operatorname{card}(\mathcal{B}) = \dim E$. Ainsi,

$$E = F \oplus G \quad \Longrightarrow \quad \dim E = \operatorname{card}(\mathcal{B}) = p + q \quad \Longrightarrow \quad \dim E = \dim F + \dim G$$

Théorème 27.14 – Fragmentation d'une base

On suppose que E est de dimension finie n. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, qu'on fragmente en deux familles $(e_1, \cdots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \cdots, e_n)$ avec $p \in [\![1, n-1]\!]$. Alors, les s.e.v. suivants sont supplémentaires :

$$V := \operatorname{Vect}(e_1, \cdots, e_p) \qquad \text{et} \qquad V' := \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \cdots, e_n)$$

On a donc $E = V \oplus V'$, et la base $(e_1, \cdots, e_n)$ est adaptée à la décomposition $E = V \oplus V'$.

Corollaire 27.15 – Existence d'un supplémentaire

Tout s.e.v. de E admet (au moins) un supplémentaire dans E.

Démonstration. La preuve n'est exigible que pour lorsque E est de dimension finie. On pose $n = \dim E \in \mathbb{N}$. Soit V un s.e.v. de E. Montrons que V admet un supplémentaire dans E. On considère $(f_1, \cdots, f_p)$ une base de V. Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter $(f_1, \cdots, f_p)$ en une base de E :

$$\mathcal{B} = (f_1, \cdots, f_p, e_{p+1}, \cdots, e_n)$$

Alors, par le Théorème 27.14, l'ensemble $V' := \text{Vect}(e_{p+1}, \cdots, e_n)$ est un supplémentaire de V dans E. □

3.3 Dimension et somme de s.e.v.

Théorème 27.16

On suppose E de dimension finie. Si F et G sont des s.e.v. de E en somme directe, alors $F + G$ est de dimension finie et

Remarque. Ce résultat est faux si la somme n'est pas directe.
Par exemple, si $\dim F > 0$, on a $\dim(\underbrace{F + F}_{=F}) = \dim F \neq \dim F + \dim F$.

Démonstration.

□

Théorème 27.17 – Formule de Grassman

On suppose E de **dimension finie**. Si F et G sont des s.e.v. de E alors $F + G$ est de dimension finie et

Par exemple, si F et G sont deux plans (vectoriels) non confondus de $\mathbb{R}^3$, on peut vérifier que $F + G = \mathbb{R}^3$. La formule de Grassman donne que $\dim(F \cap G) = 2 + 2 - 3 = 1$: ainsi l'intersection de deux plans (vectoriels) non confondus est une droite (vectorielle).

Démonstration. Comme $F + G \subset E$, l'ensemble $F + G$ est clairement de dimension finie. Les deux premières étapes consistent à construire un ensemble S qui sera en même temps un supplémentaire de F dans $F + G$ et un supplémentaire de $F \cap G$ dans G.

- L'ensemble $F \cap G$ est un s.e.v. de G, donc par le Corollaire 27.15, $F \cap G$ admet un supplémentaire S **dans** G, i.e.
$$G = (F \cap G) \oplus S \qquad \text{donc en particulier} \qquad (F \cap G) \cap S = \{0_G\} = \{0_E\}$$
- On considère l'e.v. $\mathcal{E} := F + G$. Montrons que $\mathcal{E} = F \oplus S$.
  - Tout d'abord, montrons que $F \cap S = \{0_E\}$. Comme $S \subset G$, on a $S = G \cap S$ donc
  $$F \cap S = F \cap (G \cap S) = (F \cap G) \cap S = \{0_E\}$$
  - Ensuite, montrons que $F + S = \mathcal{E}$. Comme $S \subset G$, on a $F + S \subset F + G$ donc $F + S \subset \mathcal{E}$. Réciproquement, montrons que $\mathcal{E} \subset F + S$. Soit donc $x \in \mathcal{E}$. Comme $\mathcal{E} = F + G$, on peut écrire
  $$x = x_F + x_G \qquad \text{avec} \quad (x_F, x_G) \in F \times G$$
  Or, $x_G \in G = (F \cap G) \oplus S$, donc
  $$x_G = x_{F \cap G} + x_S \qquad \text{avec} \qquad (x_{F \cap G}, x_S) \in (F \cap G) \times S$$
  On en déduit que
  $$x = \underbrace{x_F + x_{F \cap G}}_{\in F} + \underbrace{x_S}_{\in S} \in F + S$$
  D'où $\mathcal{E} \subset F + S$ par arbitraire sur x.
  - Finalement, $\mathcal{E} = F \oplus S$.
- Ainsi, par le Théorème 27.16, on a
$$G = (F \cap G) \oplus S \quad \Longrightarrow \quad \dim G = \dim(F \cap G) + \dim S$$
$$F + G = \mathcal{E} = F \oplus S \quad \Longrightarrow \quad \dim(F + G) = \dim F + \dim S$$
La première ligne donne $\dim S = \dim G - \dim(F \cap G)$, si bien que la seconde entraine :
$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

□

Remarque. La formule de Grassman permet de retrouver le Théorème 27.16. En effet, F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$, càd ssi $\dim(F \cap G) = 0$.

3.4 Dimension et s.e.v. supplémentaires

Théorème 27.18 – VIT — Caractérisations de "F, G sont supplémentaires"

On suppose E de **dimension finie**. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $F \oplus G = E$
2. $F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$
3. $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$
4. $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$

Autrement dit pour montrer que F et G sont supplémentaires, il suffit de vérifier deux assertions parmi :

- $F + G = E$

- $F \cap G = \{0\}$
- $\dim F + \dim G = \dim E$

et lorsque c'est le cas, la troisième assertion est également vérifiée.

Démonstration.

□

Remarque. Il est souvent difficile de montrer que $E = F + G$. Ainsi, pour montrer que deux s.e.v. sont supplémentaires, on montre fréquemment l'assertion 4 (mais cela ne marche que si E est de dimension finie !).
Si E est de dimension infinie, on a seulement l'équivalence entre les assertions 1 et 2, comme vu au chapitre précédent.

Exemple 21. Montrer que les ensembles $A = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ sont des s.e.v. supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

4 Compléments : dimension infinie

Théorème 27.19

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E est de dimension infinie.
2. Il existe une famille $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ qui est libre.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une famille de n vecteurs de E qui est libre.

Exemple. $\mathbb{K}\left[X\right]$ est de dimension infinie car $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre (et même une base) avec une infinité d'éléments.

Remarque. Toute famille libre infinie n'est pas nécessairement une base. Par exemple, $(X^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre infinie mais ce n'est pas une base de $\mathbb{K}\left[X\right]$.

En particulier, $F = \mathrm{Vect}(X^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est un s.e.v. de dimension infinie de $E = \mathbb{K}\left[X\right]$ mais, bien que tous deux de dimension infinie, on a cependant $F \neq \mathbb{K}\left[X\right]$. Le Théorème 27.11 est donc faux lorsque E et F sont de dimension infinie.

5 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base de E, on peut :

- Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre ET génératrice.
- Si E est de dimension finie n, vérifier que $\mathcal{F}$ est libre et que $\text{card}(\mathcal{F}) = n$.
- Si E est de dimension finie n, vérifier que $\mathcal{F}$ est génératrice et que $\text{card}(\mathcal{F}) = n$.
- Montrer tout vecteur $u \in E$ s'écrit de manière unique comme CL des vecteurs de $\mathcal{F}$.
- ...... (cf chapitres suivants !)

Méthode

Pour montrer que deux s.e.v. F et G sont égaux, on peut :

- Réécrire un des s.e.v. différemment pour obtenir l'autre (par exemple passer d'un "Vect" à une forme "équation").
- Montrer une inclusion et montrer que $\dim F = \dim G$ (si F et G sont de dimension finie).
- Raisonner par double inclusion.

Méthode

Pour montrer que deux s.e.v. F et G sont supplémentaires, on peut :

- Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$ et que $\dim F + \dim G = \dim E$
- Montrer que $F + G = E$ et que $F \cap G = \{0_E\}$
- Montrer que $F + G = E$ et que $\dim F + \dim G = \dim E$
- Montrer que tout vecteur $u \in E$ se décompose de manière unique en $u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$.