Chapitre 26

Espaces vectoriels

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
De plus, $(E,+,\cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (cf définition ci-dessous).

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition et structure

Définition 26.1 – l.c.e.

Soit X un ensemble. On appelle loi (de composition) externe sur X toute application de $Y \times X$ dans X, avec Y un ensemble distinct de X.

Si on avait $Y = X$, alors on obtiendrait une loi de composition interne. Dans ce chapitre, on considèrera toujours $Y = \mathbb{K}$.

Définition 26.2 – Espace vectoriel

Soit E un ensemble muni d'une l.c.i. $+$ et d'une loi externe notée

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \cdot u \end{aligned}$$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel si :

1. $(E, +)$ est un groupe abélien
2. Pour tous $u, v \in E$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a :
   - **EV1.** $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ (distributivité des vecteurs sur les scalaires)
   - **EV2.** $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ (distributivité des scalaires sur les vecteurs)
   - **EV3.** $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$ (pseudo-associativité avec les lois $\times$ et $\cdot$)
   - **EV4.** $1 \cdot u = u$

Les éléments de E sont appelés vecteurs. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

On omet souvent de préciser les lois $+$ et $\cdot$, voire même le corps $\mathbb{K}$: on pourra ainsi écrire “Soit E un espace vectoriel”. En abrégé, cela donne “Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.” ou encore “Soit E un e.v.”.

Remarque. Plusieurs lois différentes interviennent dans les règles **EV1.–EV4.** : la notation $+$ désigne tantôt l'addition de $\mathbb{K}$, tantôt celle de E. Le produit $\alpha\beta$ fait intervenir la multiplication de $\mathbb{K}$. La notation $x \cdot y$ n'a de sens que si x est un scalaire et y est un vecteur : c'est toujours le scalaire en premier. On verra que dans certains cas, E admet une loi produit $\times$, ce qui donne un sens à uv avec $u, v \in E$. Mais dans le cas général, E n'admet pas de loi produit et on ne peut donc pas, *a priori*, écrire le produit uv.

Remarque. Un espace vectoriel E n'est jamais vide car, en tant que groupe pour $+$, il contient un élément neutre qu'on note en général 0_E et qu'on appelle le vecteur nul.

Théorème 26.3 – Calcul avec $0_{\mathbb{K}}, 0_E$ dans un e.v.

Soit $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

- $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
- $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
- $\lambda \cdot u = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0_{\mathbb{K}} \quad \text{ou} \quad u = 0_E$

Démonstration.

$\square$

Théorème 26.4 – Calcul avec "$-$" dans un e.v.

Soit $u, v \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors

- $(-\alpha) \bullet u = \alpha \bullet (-u) = -(\alpha \bullet u)$ et en particulier $(-1_{\mathbb{K}}) \bullet u = -u$
- $(\alpha - \beta) \bullet u = \alpha \bullet u - \beta \bullet u$
- $\alpha \bullet (u - v) = \alpha \bullet u - \alpha \bullet v$

Il arrive qu'on note 0 pour signifier à la fois le vecteur nul 0_E et le scalaire nul $0_{\mathbb{K}}$ (le contexte permettant souvent de lever toute ambiguité).
Par ailleurs, on omettra dorénavant d'écrire la loi $\bullet$ et on notera seulement λu au lieu de $\lambda \bullet u$.

1.2 Quelques espaces vectoriels usuels

On pourra utiliser *sans démonstration* que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels. Par souci de concision, on n'introduira pas toutes les variables utilisées, le contexte et la notation permettant de s'y retrouver.

- Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-e.v. muni des lois usuelles :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

- $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-e.v. muni des lois usuelles :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{m} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) X^k$$

$$\lambda \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) X^k$$

- $\mathbb{K}(X)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. muni des lois usuelles :

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}:=\frac{AD+BC}{BD} \qquad \lambda\frac{A}{B}:=\frac{\lambda A}{B}$$

- Le corps $\mathbb{K}$ lui-même est un $\mathbb{K}$-e.v. : la loi $+$ est celle du corps $\mathbb{K}$, et la loi $\bullet$ correspond à la l.c.i. $\times$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in \mathbb{K} \qquad \lambda \bullet x := \lambda \times x = \lambda x$$

Remarque. Si E est un $\mathbb{C}$-e.v., alors E est un $\mathbb{R}$-e.v. En effet, si les propriétés **EV1**. à **EV4**. sont vérifiées pour tous les scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ alors elles le sont en particulier pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1.3 Espace produit

Rappel : soit $n \geq 2$ un entier. Étant donnés n ensembles $A_1, \cdots, A_n$, on note

$$A_1 \times \ldots \times A_n := \left\{ (a_1, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n \right\}$$

Théorème 26.5 – Espace produit

Soit $n \geq 2$ un entier, $E_1, \cdots, E_n$ des $\mathbb{K}$-e.v. Alors $E_1 \times \ldots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-e.v. muni des lois suivantes :

$$(u_1, \cdots, u_n) + (v_1, \cdots, v_n) := (u_1 + v_1, \cdots, u_n + v_n)$$

$$\lambda(u_1, \cdots, u_n) := (\lambda u_1, \cdots, \lambda u_n)$$

Il y a un abus de notation dans la définition ci-dessus : on a noté $+$ et $\bullet$ pour désigner aussi bien les lois de E_1, de E_2, de E_3, etc. ainsi que de $E_1 \times \ldots \times E_n$. C'est une pratique quasi systématique avec les e.v. : on déduit de quelle loi il s'agit en fonction du contexte.

Exemple 1. $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-e.v. muni des lois suivantes :

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$$

On étudiera surtout les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$.

Exemple 2. $E^n := E \times \ldots \times E$ est un $\mathbb{K}$-e.v. (avec E un $\mathbb{K}$-e.v.)

1.4 Espaces de suites et de fonctions

Théorème 26.6 – Espace usuel $\mathbb{K}^\Omega$

Soit Ω un ensemble quelconque. $\mathbb{K}^\Omega$ est un $\mathbb{K}$-e.v. muni des lois suivantes :

$$\begin{aligned} f+g : \Omega &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto f(x)+g(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda f : \Omega &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto \lambda f(x) \end{aligned}$$

On notera que Ω est un ensemble quelconque, il n'est pas forcément muni de l.c.i. $+$ et $\bullet$. Pour autant, les fonctions $f+g$ et λf sont bien définies car les lois $+$ et $\bullet$ de leur définition s'appliquent à des éléments de l'ensemble d'arrivée, càd $\mathbb{K}$.

Exemple 3. En particulier, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-e.v. avec les lois usuelles suivantes :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Exemple 4. En particulier, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K}^I$ est un $\mathbb{K}$-.e.v. avec les lois usuelles suivantes :

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$$
$$\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$$

Exemple 5. $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{K})$, avec I un intervalle non trivial et $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, est un $\mathbb{K}$-e.v. muni des même lois usuelles que ci-dessus, avec $f, g \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{K})$.

1.5 Combinaison linéaire

Définition 26.7 – Combinaison linéaire (cas fini)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \cdots, u_n \in E$. On dit qu'un vecteur $u \in E$ est une combinaison linéaire de $u_1, \cdots, u_n$ si

$$\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$$

Exemple 6. Tout vecteur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$:

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$$

Exemple 7. Montrer que le vecteur $(0,1,2)$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $(2,3,-3)$ et de $(6,7,-13)$.

Exemple 8. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que ~~“le vecteur”~~ la fonction $f(x) = \sin^2(x)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des ~~“vecteurs”~~ fonctions $u_1(x) = 1$ et de $u_2(x) = \cos(2x)$. En est-il de même pour la fonction $g(x) = \sin x$?

Exemple 9. Tout polynôme P de degré au plus n peut s'écrire comme une combinaison linéaire des polynômes $1, X, X^2, \cdots, X^n$:

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n$$

Remarque. On peut étendre la Définition 26.7 au cas $n = 0$: on pose alors par convention $\sum_{i=1}^{0} (\cdots) = 0_E$. Autrement dit, une combinaison linéaire de 0 vecteur donne le vecteur nul 0_E.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition-caractérisation et exemples

On rappelle que E désigne un $\mathbb{K}$-e.v.

Définition 26.8 – S.e.v.

On appelle sous-espace vectoriel de E tout ensemble $F \subset E$ qui soit stable par $+$ et $\cdot$, càd :

$$\forall u,v \in F \qquad u+v \in F \qquad \text{et} \qquad \forall(\lambda,u) \in \mathbb{K}\times F \qquad \lambda \cdot u \in F$$

et tel que, muni des lois induites $+' : F \to F$ et $\cdot' : F \to F$, l'ensemble $(F,+',\cdot')$ est encore un e.v.

On utilisera souvent l'abréviation "F est un s.e.v. de E". Comme pour les groupes, anneaux et corps, on évitera d'utiliser cette définition pour déterminer si F est un s.e.v. de E, mais plutôt la caractérisation qui suit.

Tout s.e.v. F de E admet un élément neutre pour l'addition, 0_F, qui (par unicité de l'élément neutre) vérifie $0_F = 0_E$. On évitera cependant d'écrire 0_F avant d'avoir justifié que F est un s.e.v.

Théorème 26.9 – Caractérisation d'un s.e.v. en 3 coups

Soit $F \subset E$. Alors F est s.e.v. si et seulement si

1. $0_E \in F$
2. F est stable par la loi $+$: $\quad \forall u,v \in \boxed{F} \qquad u+v \in F$
3. F est stable par la loi $\cdot$: $\quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall u \in \boxed{F} \qquad \lambda u \in F$

Cette caractérisation est notoirement utile pour montrer qu'un ensemble *n'est pas un s.e.v.* : il suffit de vérifier qu'une des 3 assertions ci-dessus n'est pas vérifiée. En revanche, pour montrer qu'un ensemble *est bien un s.e.v.*, il est en général plus rapide d'utiliser la caractérisation suivante :

Théorème 26.10 – Caractérisation d'un s.e.v. en 2 coups

Soit $F \subset E$. Alors F est s.e.v. si et seulement si

1. $0_E \in F$
2. F est stable par combinaison linéaire :

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K} \qquad \forall u,v \in \boxed{F} \qquad \alpha u + \beta v \in F$$

Remarque. L'assertion 2 signifie que F est stable par combinaison linéaire. On a en effet :

$$\begin{array}{lllll} & & \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K} & \forall u,v \in F & \alpha u+\beta v \in F \\ \iff & \forall n \geq 2 & \forall \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K} & \forall u_1,\cdots,u_n \in F & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n \in F \end{array}$$

Remarque. Comme pour les groupes, dans les caractérisation ci-dessus, on peut remplacer l'assertion "$0_E \in F$" par "$F \neq \varnothing$". Par exemple pour la seconde caractérisation, on a en réalité :

$$\begin{cases} 0_E \in F \\ F \text{ est stable par combinaison linéaire} \end{cases} \iff \begin{cases} F \neq \varnothing \\ F \text{ est stable par combinaison linéaire} \end{cases}$$

Mais en général, la méthode la plus rapide de montrer que $F \neq \varnothing$ est de montrer que $0_E \in F$ (ce qui est par ailleurs toujours vrai pour un s.e.v.).

Exemple 10. $\{0_E\}$ et E sont des s.e.v. de E, appelés sous-espaces triviaux.

Exemple 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{C}_n\left[X\right]$ est un s.e.v. de $\mathbb{C}\left[X\right]$. On rappelle que $\mathbb{C}_n\left[X\right] = \left\{P \in \mathbb{C}\left[X\right] \mid \deg P \leq n\right\}$.

Méthode

Pour montrer qu'un ensemble E est un espace vectoriel, on peut souvent montrer qu'il s'agit d'un s.e.v. d'un e.v. usuel E' qui contient E (la liste des espaces vectoriels usuels est donnée en dernière page).

Exemple 12. Montrer que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\}$ est un $\mathbb{R}$-e.v.

2.2 S.e.v. engendrés (par une partie X)

Théorème 26.11 – Intersection

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous s.e.v. $F_1, \cdots, F_n$ de E, leur intersection $F_1 \cap \cdots \cap F_n$ est aussi un s.e.v. de E.
Plus généralement, si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de s.e.v. de E, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est aussi un s.e.v. de E.

Démonstration. On ne prouve que la deuxième assertion, à savoir que $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un s.e.v. de E.

□

Exemple 13. Par définition, $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{K}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ donc $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{K})$ est un s.e.v. de $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$, ou encore de $\mathbb{K}^I$.

Définition 26.12 – S.e.v. engendré par une partie

Soit X une partie quelconque de E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par X l'intersection de tous les s.e.v. F de E qui contiennent X. C'est un s.e.v. de E qu'on note $\mathrm{Vect}(X)$.

Dit autrement, si on note $(F_i)_{i\in I}$ la famille de tous les s.e.v. de E qui vérifient $X \subset F_i$, alors

$$\mathrm{Vect}(X) := \bigcap_{i\in I} F_i$$

Attention : X n'est pas forcément un s.e.v. de E, ce peut être une partie quelconque ! Par contre, $\mathrm{Vect}(X)$ est toujours un s.e.v. de E par définition.

Remarque. Cette définition n'a qu'un intérêt très théorique...

Théorème 26.13

$\mathrm{Vect}(X)$ est le plus petit (pour l'inclusion) s.e.v. de E qui contient X.
Dit autrement, pour tout **s.e.v.** F, on a $X \subset F \implies \mathrm{Vect}(X) \subset F$.

Exemple 14. $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$: en effet $\{0_E\}$ est un s.e.v. qui contient $\varnothing$, et c'est le plus petit, car pour tout autre s.e.v. G (qui contient forcément $\varnothing$), on a $\{0_E\} \subset G$.

Corollaire 26.14

Soit A, B deux parties de E. On a $A \subset \text{Vect}(A)$. De plus, si $A \subset B$, alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.

Démonstration. $\text{Vect}(A)$ est le plus petit s.e.v. qui contient A, donc $A \subset \text{Vect}(A)$.

□

Théorème 26.15

$\text{Vect}(X) = X$ si et seulement si X est un s.e.v. de E.

Pour des exemples plus concrets, il est plus pertinent de commencer par des cas où X est une partie finie de E, i.e. X ne contient qu'un nombre fini de vecteurs de E.

2.3 S.e.v. engendré par une famille finie

Notation. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsque $X = \{u_1, \cdots, u_n\}$, l'ensemble $\text{Vect}(X)$ est noté :

$$\text{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$$

et on l'appelle le sous-espace engendré par la famille $(u_1, \cdots, u_n)$.

Théorème 26.16 – Caractérisation de Vect$(u_1, \cdots, u_n)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \cdots, u_n \in E$.
$\text{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$ est exactement l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $u_1, \cdots, u_n$:

$$\text{Vect}(u_1, \cdots, u_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \;\middle|\; \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\}$$

Exemple 15. Dans $\mathbb{R}^2$, on note $u_x = (1, 0)$ et $u_y = (0, 1)$. Déterminer $\text{Vect}(u_x, u_y)$.

Exemple 16. Dans l'e.v. $\mathbb{K}[X]$, on a

$$\text{Vect}(1, X, \cdots, X^n) =$$

Définition 26.17

Pour tout vecteur $u \in E$, on note

$$\mathbb{K}u := \text{Vect}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Si $u \neq \{0_E\}$, on dit que $\mathbb{K}u$ est une droite vectorielle. Si $u = 0_E$, alors $\mathbb{K}u = \{0_E\}$ n'est pas une droite vectorielle.

Exemple 17. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\text{Vect}(I_n) = \mathbb{K}I_n = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Cela correspond à l'ensemble des matrices scalaires, qui est donc un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 18. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on rappelle que la matrice élémentaire E^{ii} est la matrice dont le coefficient d'indice (i,i) vaut 1 et tous les autres sont nuls. En particulier :

$$\begin{aligned}
&\text{Vect}\left(E^{11}, E^{22}, E^{33}, \cdots, E^{nn}\right) \\
&= \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & & \mathbf{0} \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 & & \mathbf{0} \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{pmatrix} \middle| \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En particulier, ... est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 19. Soit $u_1, \cdots, u_n, v \in E$. On a

$$\text{Vect}(u_1, \cdots, u_n) \subset \text{Vect}(u_1, \cdots, u_n, v)$$

En effet, si $w \in \text{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$, alors

$$w = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n \qquad \text{avec } \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

et dans ce cas, $w = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} v$ avec $\lambda_{n+1} = 0 \in \mathbb{K}$. Donc $w \in \text{Vect}(u_1, \cdots, u_n, v)$.

Théorème 26.18

Soit $u_1, \cdots, u_n, v \in E$. Si v est une combinaison linéaire de $u_1, \cdots, u_n$ (i.e. $v \in \text{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$), alors

$$\text{Vect}(u_1, \cdots, u_n, v) = \text{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$$

Autrement dit, "Dans un Vect, on peut retirer un vecteur qui est une combinaison linéaire des autres".

Démonstration. On raisonne par double inclusion. L'inclusion $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_n) \subset \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_n, v)$ est évidente.

□

2.4 Retour sur Vect(X) avec X quelconque

Théorème 26.19 – Caractérisation de Vect(X)

Vect(X) est exactement l'ensemble des combinaisons linéaires qu'on peut former à partir de toute famille finie de vecteurs de X :

$$\mathrm{Vect}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, \quad (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad (u_1, \cdots, u_n) \in X^n \right\}$$

On dispose donc de beaucoup de degré de liberté : on peut faire varier le nombre (fini) n de vecteurs de la combinaison linéaire, puis à n fixé on peut choisir les scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ et les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ dans X.

Exemple 20. Dans $\mathbb{K}[X]$, avec $Y = \{1, X, X^2, X^3, \cdots\}$, on a $\mathrm{Vect}(Y) = \mathbb{K}[X]$.

Exemple 21. Dans $\mathbb{K}[X]$, avec $Y = \{1, X^2, X^4, X^6, \cdots\}$, l'ensemble Vect$(Y)$ est l'ensemble des polynômes qui s'écrivent

$$\sum_{k=0}^{m} a_k X^{2k} \qquad \text{avec} \qquad a_0, a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{K}$$

ou encore l'ensemble des polynômes P qui s'écrivent $Q(X^2)$, avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ (ci-dessus on aurait $Q = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$).

3 Familles génératrices, familles libres, bases

3.1 Familles génératrices (finies)

Définition 26.20

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille génératrice (de E) si $E = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$.
On dit également que la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ engendre E.

Remarque. L'inclusion $\mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_n)\subset E$ est évidente par définition de $\mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_n)$. Ainsi, $(e_1,\cdots,e_n)$ est génératrice ssi $E\subset \mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_n)$ donc ssi **tout** vecteur $u\in E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $(e_1,\cdots,e_n)$:

$$\forall u\in E \quad \exists \lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{K} \qquad u=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i \tag{G}$$

Exemple 22. (Dans $\mathbb{R}^3$), on pose $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(0,1,1)$, $e_3=(0,0,1)$ et $e_4=(0,0,0)$. Montrer que (e_1,e_2,e_3,e_4) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Dans les faits, on peut aussi montrer de la même manière que (e_1,e_2,e_3) est encore une famille génératrice.

Exemple 23. Dans l'e.v. $\mathbb{K}_n[X]$, la famille $(1,X,\cdots,X^n)$ est génératrice par l'Exemple 16.

Remarque. Attention, pour être une famille génératrice de E, il faut que tous les vecteurs de la famille soient des éléments de E. Ainsi, la famille $(1,X,\cdots,X^{n+1})$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ car $X^{n+1}\notin\mathbb{K}_n[X]$.

3.2 Famille libre (finie)

Définition 26.21 – Famille libre (cas fini)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On dit qu'une famille $(u_1,\cdots,u_n)\in E^n$ est une <u>famille libre</u> si

$$\forall \lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{K} \qquad \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i=0_E \quad\Longrightarrow\quad (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=(0,\cdots,0)\right)$$

On dit également que les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ sont linéairement indépendants.

Méthode

Pour montrer qu'une famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est libre, il faut se donner des scalaires quelconques $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Puis, **en supposant que la combinaison linéaire** $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ **est nulle** (égale à 0_E), il faut montrer que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Exemple 24. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (0,1,1)$ et $e_3 = (0,0,1)$. Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

Exemple 25. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on considère les suites définies par $u_n = n+1$, $v_n = n^2+1$ et $w_n = n^2+n$. Montrer que la famille (u, v, w) est libre.

3.3 Famille liée (finie)

Définition 26.22

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si une famille $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$ n'est pas libre, on dit que $(u_1, \cdots, u_n)$ est une famille liée. Cela signifie que

$$\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \quad \text{et} \quad (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0)$$

Cela revient à dire qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ **non tous nuls** tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$. On dit également que les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ sont linéairement dépendants.

Exemple 26. Une famille à un élément, (u) est libre si $u \neq 0_E$, et liée si $u = 0_E$.

Remarque. Le caractère libre, lié ou générateur d'une famille ne dépend pas de l'ordre des vecteurs de la famille.

Exemple 27. Si une famille contient un vecteur nul, alors la famille est liée. Par exemple, avec la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ avec $u_1 = 0_E$, on peut choisir $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = (1, 0, \cdots, 0)$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 1 \underbrace{u_1}_{0_E} + 0u_2 + \ldots + 0u_n = 0_E$$

et ce alors que $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$. Donc la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est liée.

Définition 26.23

Soit $u, v \in E$. On dit que u est proportionnel à v s'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $u = \alpha v$.

Définition 26.24 – Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $u, v \in E$ sont dits colinéaires si un de ces vecteurs est proportionnel à l'autre, càd :

$$(\exists \alpha \in \mathbb{K} \quad u = \alpha v \qquad \text{ou} \qquad \exists \beta \in \mathbb{K} \quad v = \beta u)$$

Remarque. Si u et v sont non nuls, alors la relation $u = \alpha v$ entraine nécessairement $\alpha \neq 0$ (sinon $\alpha v = 0_E$ or $u \neq 0_E$). En particulier, on a aussi $v = \beta u$ en posant $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$. Ainsi, si u et v sont non nuls, ces vecteurs sont colinéaires ssi u est proportionnel à v ssi v est proportionnel à u.

Théorème 26.25 – Caractérisation d'une famille liée (pour 2 vecteurs)

Soit $u, v \in E$. La famille (u, v) est liée si et seulement si u et v sont colinéaires.

Démonstration.

□

Exemple 28. On considère

$$u = (1, 2, -1) \qquad v = (3, 6, -3) \qquad w = (-2, -4, 0)$$

La famille (u, v) est-elle libre ou liée ?

La famille (u, w) est-elle libre ou liée ?

Théorème 26.26 – Caractérisation d'une famille liée (n vecteurs)

Soit $n \geq 2$. La famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est liée si et seulement si on peut exprimer un vecteur de la famille comme une combinaison linéaire des autres. Autrement dit,

$$\begin{aligned} (u_1, \cdots, u_n) \text{ est liée} \quad & \text{ssi} \quad \exists k \in [\![1, n]\!] \qquad u_k \in \operatorname{Vect}(u_1, \cdots, u_{k-1}, u_{k+1}, \cdots, u_n) \\ & \text{ssi} \quad \exists k \in [\![1, n]\!] \qquad \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-1} \quad u_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i u_i \end{aligned}$$

Démonstration. Similaire au Théorème 26.25 : par exemple si $u_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i u_i$, alors

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{j-1} u_{j-1} + (-1) u_j + \lambda_{j+1} u_j + \ldots + \lambda_n u_n = 0_E$$

avec une famille de n scalaires $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{j-1}, -1, \lambda_{j+1}, \cdots, \lambda_n)$ non tous nuls car le j-ième élément n'est pas nul. □

Exemple 29. On considère

$$u=(1,0) \qquad v=(1,1) \qquad w=(1,2)$$

Alors la famille (u,v,w) est liée car $w=-1\,u+2\,v$.
Pourtant, on notera que ses vecteurs ne sont pas deux à deux colinéaires : les familles (u,v), (v,w) et (w,u) sont toutes libres.

Exemple 30. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille $(\exp, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ est liée. En effet : ....

Remarque. Si une famille comporte deux vecteurs identiques, elle est liée. En effet, si on considère une famille $(u,u,u_3,\cdots,u_n)$, alors le premier vecteur u peut s'exprimer comme une combinaison linéaires des vecteurs suivants $u,u_3,\cdots,u_n$:

$$u=1\,u+0u_3+\ldots+0u_n$$

3.4 Propriétés des familles libres et génératrices

Théorème 26.27

1. Si on ajoute un vecteur à une famille *génératrice*, cette famille reste génératrice.
2. Si on ajoute un vecteur à une famille *liée*, cette famille reste liée.
3. Si on enlève un vecteur à une famille *libre*, cette famille reste libre.

En réitérant le processus, on peut généraliser ces assertions à un nombre fini de vecteurs ajoutés / retranchés.

Démonstration. On considère la première assertion. Soit $(e_1,\cdots,e_n)$ une famille génératrice et $v\in E$. Montrons que $(e_1,\cdots,e_n,v)$ est génératrice. Soit $u\in E$. Montrons que $u\in \mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_n,v)$. Comme $(e_1,\cdots,e_n)$ est génératrice, on a $u\in\mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_n)$, donc

$$\begin{aligned} &\exists\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{K} \qquad u=\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_ne_n\\ \Longrightarrow\ &\exists\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{K} \qquad u=\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_ne_n+0v\end{aligned}$$

donc $u\in\mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_n,v)$. Par arbitraire sur u, la famille $(e_1,\cdots,e_n,v)$ est génératrice. La seconde assertion se prouve de manière similaire.

□

3.5 Bases (cas fini)

Exemple 31. Si $u=(1,0)$, $v=(0,1)$ et $w=(1,1)$, alors le vecteur $(-2,3)$ peut s'écrire comme une CL (*combinaison linéaire*) de u,v,w. Cela étant, on remarque qu'il y a plusieurs CL possibles :

$$(-2,3)= \qquad (1,0)+ \qquad (0,1)+ \qquad (1,1)$$

$$(-2,3)= \qquad (1,0)+ \qquad (0,1)+ \qquad (1,1)$$

Il n'y a donc pas forcément unicité de la CL.

Exemple 32. Si $u=(1,0,0)$ et $v=(0,1,0)$, alors le vecteur $(0,0,3)$ ne peut s'écrire comme une CL de u,v. Il peut donc arriver qu'il n'y ait pas existence de l'écriture comme une CL.

Lemme 26.28 – Unicité de la CL pour une famille libre

Soit $(u_1,\cdots,u_n)$ une famille **libre** et $u\in E$. On suppose que $u\in \mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_n)$, i.e.

$$u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i \qquad \text{avec } \alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{K}$$

Dans ce cas, les scalaires $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ sont **uniques**.

En particulier, si $(u_1,\cdots,u_n)$ est une famille libre, alors toute écriture d'un vecteur comme CL de $u_1,\cdots,u_n$, *si cette écriture existe*, est unique. On dira plus abusivement “cette CL est unique (si elle existe)”.

Démonstration.

□

Exemple 33. Dans l'Exemple 31, on a vu que la CL de $(-2,3)$ selon u,v,w n'était pas unique. La famille (u,v,w) n'est donc pas libre. On vérifie d'ailleurs facilement qu'elle est liée.

Définition 26.29 – Base

On dit que $(e_1,\cdots,e_n)$ est une base (de E) si la famille $(e_1,\cdots,e_n)$ est libre ET génératrice.

Soit $(e_1,\cdots,e_n)$ une famille de E.

$$\boxed{(e_1,\cdots,e_n) \text{ est génératrice} \iff \text{Tout vecteur } u\in E \text{ s'écrit comme une CL de } e_1,\cdots,e_n}$$

$$\boxed{(e_1,\cdots,e_n) \text{ est libre} \iff \text{Pour tout } u\in E,\ \textbf{SI } u \text{ s'écrit comme une CL de } e_1,\cdots,e_n,\ \textbf{ALORS} \text{ cette CL est unique}}$$

$$\boxed{(e_1,\cdots,e_n) \text{ est une base} \iff \text{Tout vecteur } u\in E \text{ s'écrit comme une CL de } e_1,\cdots,e_n \textbf{ ET } \text{cette CL est unique}}$$

Reformulons la troisième équivalence :

Théorème 26.30

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille dans E. La famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base si et seulement si pour tout $u \in E$,

$$\boxed{\exists\,!}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \qquad u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Les scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont appelés les coordonnées de u dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$.

Exemple 34. La famille $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. En effet, on a vu au chapitre sur les polynômes que tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$ s'écrit de manière unique comme

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 X^0 + a_1 X^1 + \ldots + a_n X^n$$

Les scalaires $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ sont ainsi les coordonnées de P dans la base $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$.

Exemple 35. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (0,1,1)$ et $e_3 = (0,0,1)$. Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base. Quelles sont les coordonées de $u = (1,0,0)$ selon cette base ?

Attention ! Certains sujets notent x un *vecteur* de E, et notent $x_1, \cdots, x_n$ ses *coordonnées* dans une base donnée. Dans ce cas $x_1, \cdots, x_n$ jouent le rôle des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ du théorème ci-dessus. Il faut donc être particulièrement vigilant sur les notations.

Exemple 36 (*Base canonique*)**.** Dans $\mathbb{K}^n$, on pose

$$e_1 = (1,0,0,\cdots,0) \qquad e_2 = (0,1,0,\cdots,0) \qquad \ldots \qquad e_n = (0,0,\cdots,0,1)$$

La famille $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$. Si $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, alors

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Autrement dit, les *scalaires* $x_1, \cdots, x_n$ sont les coordonnées de x dans la base canonique $(e_1, \cdots, e_n)$.

4 Somme de s.e.v.

4.1 Définition et exemples

Rappel : étant donné deux parties F et G d'un ensemble E, on pose :

$$\begin{aligned} F+G &:= \{x+y \mid x \in F,\, y \in G\} \\ &= \{u \in E \mid \exists u_F \in F \quad \exists u_G \in G \qquad u = u_F + u_G\} \end{aligned}$$

Théorème 26.31

Soit F, G deux s.e.v. de E. Alors $F+G$ est un s.e.v. de E appelé somme de F et de G.

Dit autrement, $F+G$ est l'ensemble des vecteurs qui peuvent s'écrire comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, et cet ensemble est un s.e.v.

Démonstration.

□

Exemple 37. Dans $\mathbb{R}^2$, on pose

$$F = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,0)) \qquad \text{et} \qquad G = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((0,1))$$

Montrer que $F+G = \mathbb{R}^2$.

ATTENTION ! $F+G \neq F \cup G$. En général, $F \cup G$ n'est même pas un s.e.v.
En reprenant l'exemple ci-dessus, $F \cup G$ n'est pas un s.e.v. : en effet, on a $(1,0) \in F \cup G$ et $(0,1) \in F \cup G$ mais

$$(1,0)+(0,1)=(1,1) \notin F \cup G \qquad \text{car } (1,1) \notin F \quad \text{et} \quad (1,1) \notin G$$

Exemple 38. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère

$$F_1 := \{(x,y,z) \mid x+y+z=0\} \qquad \text{et} \qquad F_2 := \{(x,y,z) \mid x=y=z\}$$

alors F_1, F_2 sont des s.e.v. et $F_1+F_2=\mathbb{R}^3$.

Théorème 26.32

Soit F, G deux s.e.v. de E. Le s.e.v. $F+G$ est le plus petit s.e.v. contenant F et G, càd $F+G=\mathrm{Vect}(F \cup G)$.

Remarque. On montre facilement que

$$F+G=G+F \qquad\qquad F+\{0_E\}=F$$
$$F+F=F \qquad\qquad F+E=E$$

4.2 Somme directe de s.e.v.

Soit F, G deux s.e.v. et $u \in E$. Par définition de $F+G$:

$$u \in F+G \iff \exists (u_F, u_G) \in F \times G \qquad u=u_F+u_G$$

Définition 26.33

On dit que F et G sont en somme directe si, pour tout $u \in F+G$, la décomposition de u en u_F+u_G est **unique**. Autrement dit, si

$$\forall u \in F+G \qquad \boxed{\exists!}(u_F, u_G) \in F \times G \qquad u = u_F + u_G$$

Lorsque F, G sont en somme directe, on note $F \oplus G$ leur somme au lieu de $F+G$.

Théorème 26.34

Soit F, G deux s.e.v. de E. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont en somme directe.
2. $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration. Montrons 1 $\implies$ 2. Soit $u \in F \cap G$. Alors on peut écrire deux décompositions de u :

$$u = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$$
$$u = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{u}_{\in G}$$

Comme F et G sont en somme directe, la décomposition de u est unique. Ainsi $u = 0_E$. Ainsi $F \cap G \subset \{0_E\}$ et l'autre inclusion est évidente. $\square$

4.3 S.e.v. supplémentaires

Définition 26.35

Si $F \oplus G = E$, on dit que F et G sont des s.e.v. supplémentaires (de E).
On dit également que G est **un** supplémentaire de F.

Un même espace F peut avoir plusieurs supplémentaires (cf Exemple 40).

Théorème 26.36

Soit F, G deux s.e.v. de E. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $F \oplus G = E$
2. $F + G = E \quad$ et $\quad F \cap G = \{0_E\}$
3. Tout vecteur de E se décompose de manière unique en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :
$$\forall u \in E \qquad \exists!(u_F, u_G) \in F \times G \qquad u = u_F + u_G$$

Exemple 39. Dans $\mathbb{R}^3$, les s.e.v.

$$F_1 := \{(x,y,z) \mid x+y+z=0\} \qquad \text{et} \qquad F_2 := \{(x,y,z) \mid x=y=z\}$$

sont supplémentaires : $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$.

Exemple 40. Dans $\mathbb{R}^2$, avec $F = \mathrm{Vect}((1,0))$ et $G = \mathrm{Vect}((0,1))$, on peut facilement vérifier que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$, i.e. que F et G sont supplémentaires.
Mais si on pose $G' = \mathrm{Vect}((1,1))$, on peut également montrer que $F \oplus G' = \mathbb{R}^2$. F admet donc plusieurs supplémentaires ! Plus généralement, on peut montrer que tout vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ avec $u \notin F$, on a $F \oplus \mathbb{K}u = \mathbb{R}^2$.

Remarque. Attention à ne pas confondre supplémentaire et complémentaire : F^c n'est jamais un s.e.v. car $0 \notin F^c$. En plus, le complémentaire est unique, alors qu'un s.e.v. admet sauf exceptions plusieurs supplémentaires.

5 Familles infinies

5.1 Famille presque nulle

Définition 26.37 – Famille presque nulle

Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ une famille de scalaires indexée par un ensemble I (fini ou infini).

- On appelle support des $(\lambda_i)_{i\in I}$ l'ensemble des indices $k \in I$ tels que $\lambda_k \neq 0$, càd l'ensemble
$$S = \{k \in I \mid \lambda_k \neq 0\}$$
- On dit que la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est presque nulle si son support S est fini.

On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles d'éléments de $\mathbb{K}$ presque nulles indexées par I.

Autrement dit, une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est presque nulle si elle ne possède qu'un nombre fini d'éléments non nuls.

Remarque. Si I est fini, alors $\mathbb{K}^{(I)} = \mathbb{K}^I$.

Remarque. Lorsque $I = \mathbb{N}$, toute famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ admet un rang maximal N_λ au-delà duquel $\lambda_i = 0$ (i.e. $\forall i \geq N_\lambda \quad \lambda_i = 0$). Ainsi, choisir une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ revient à choisir un entier $N \in \mathbb{N}$ puis une famille $\lambda_0, \cdots, \lambda_N \in \mathbb{K}$ de scalaires nuls ou non (cette famille sera ensuite complétée par des zéros jusqu'à l'infini).

5.2 CL et s.e.v. engendré par une famille (finie ou infinie)

Définition 26.38 – Combinaison linéaire (cas général)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille (possiblement infinie) de vecteurs de E. On dit qu'un vecteur $u \in E$ est une combinaison linéaire des $(u_i)_{i\in I}$ si

$$\exists (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \qquad u = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

On note $\mathrm{Vect}(u_i)_{i\in I}$ l'ensemble des vecteurs de E qui s'écrivent comme une combinaison linéaire des $(u_i)_{i\in I}$:

$$\mathrm{Vect}(u_i)_{i\in I} := \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i u_i \;\middle|\; (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\} \qquad = \mathrm{Vect}\left(\{u_i \mid i \in I\} \right)$$

Si on note S le support de $(\lambda_i)_{i\in I}$, comme $\lambda_i = 0$ si $i \notin S$, alors

$$\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = \sum_{i\in S} \lambda_i u_i + \cancel{\sum_{i\in I\setminus S} \lambda_i u_i} = \sum_{i\in S} \lambda_i u_i$$

C'est donc une somme avec un nombre fini de termes (car S est fini), ce qui a toujours un sens.

Remarque. Lorsque $I = \mathbb{N}$, un vecteur u est une CL de $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ssi il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u s'écrit comme une CL de $u_0, \cdots, u_N$, i.e.

$$\mathrm{Vect}(u_i)_{i\in\mathbb{N}} = \left\{ \sum_{i=0}^{N} \lambda_i u_i \;\middle|\; N \in \mathbb{N}, \quad \lambda_0, \cdots, \lambda_N \in \mathbb{K} \right\}$$

En effet, écrire $u = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i u_i$ revient à écrire $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i u_i$ avec la famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ obtenue en ayant fixé $\lambda_{N+1} = \lambda_{N+2} = \ldots = 0$.

Exemple 41. Dans $\mathbb{K}[X]$, on a

$$\mathrm{Vect}(X^k)_{k\in\mathbb{N}} = \left\{ \sum_{k=0}^{N} \lambda_k X^k \;\middle|\; N \in \mathbb{N}, \quad \lambda_0, \cdots, \lambda_N \in \mathbb{K} \right\} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 42. Dans $\mathbb{K}[X]$,

$$\mathrm{Vect}(X^{2k})_{k\in\mathbb{N}} =$$

5.3 Famille génératrice (finie ou infinie)

Définition 26.39 – Famille génératrice (cas général)

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) de vecteurs de E. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- $\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I} = E$
- **Tout** vecteur $u \in E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des $(e_i)_{i\in I}$:

$$\forall u \in E \quad \exists(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)} \qquad u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

Lorsque c'est le cas, on dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice (de E).

Exemple 43. Par l'Exemple 41, dans l'e.v. $\mathbb{K}[X]$, la famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 44. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors la famille $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{K}[X]$. En effet, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, si on pose $N \geq \max(0, \deg P)$, on a par la formule de Taylor :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k (X-\alpha)^k \qquad \text{avec} \quad \lambda_k := \begin{cases} \dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} & \text{si } k \leq N \\ 0 & \text{si } k \geq N+1 \end{cases}$$

La famille $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien presque nulle : P s'écrit donc comme une combinaison linéaire des $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

5.4 Famille libre (finie ou infinie)

Définition 26.40 – Famille libre (cas général)

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) de vecteurs de E. On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille libre si

$$\forall(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \qquad \sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\forall i \in I \quad \lambda_i = 0)$$

Pour l'exemple qui suit, on rappelle que pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$, on note

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 45. On se place sur le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrons que la famille $(\mathbb{1}_{[0,k]})_{k\in\mathbb{N}}$ est libre. Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille presque nulle telle que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \mathbb{1}_{[0,k]} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$$

Montrons que chaque terme de $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est nul.

5.5 Base (finie ou infinie)

Définition 26.41 – Base (cas général)

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) de vecteurs de E. On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une base (de E) si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice et libre.

Théorème 26.42

Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si

$$\forall u \in E \qquad \boxed{\exists!}(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \qquad u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

Les scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ sont appelés les coordonnées de u dans la base $(e_i)_{i\in I}$.

Autrement dit, tout vecteur de E se décompose selon un nombre **fini** de vecteurs de la famille $(e_i)_{i\in I}$, et l'écriture de cette décomposition est unique.

Exemple 46. La famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée base canonique.

Exemple 47. L'exemple 44 montre que la famille $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{K}[X]$. On peut montrer qu'elle est libre (exercice). C'est donc une base de $\mathbb{K}[X]$.

6 Compléments : algèbre (programme de MP uniquement)

Définition 26.43 – Non officiel : algèbre

On dit que $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre si :

1. $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.
2. $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau.
3. La loi $\times$ vérifie :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall u, v \in \mathcal{A} \qquad \lambda \cdot (u \times v) = (\lambda \cdot u) \times v = u \times (\lambda \cdot v)$$

Si de plus $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau *commutatif*, on dira que $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre *commutative*.

On verra dans un chapitre ultérieur que la troisième propriété (couplée à la distributivité) signifie que l'application suivante est ce qu'on appelle "bilinéaire" :

$$\times : \quad \begin{array}{l} \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A} \\ (u,v) \mapsto u \times v \end{array}$$

Exemple 48.

- $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}^{\Omega}$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}(X)$ sont toutes des $\mathbb{K}$-algèbres commutatives.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $n \neq p$ n'est pas une $\mathbb{K}$-algèbre car ce n'est pas un anneau.

7 Une méthode utile en TD

On a vu deux façons de définir un s.e.v. Par exemple dans $\mathbb{R}^3$, on peut écrire le s.e.v. suivant de deux façons :

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Vect}\left((1,0,-1),(0,1,-1)\right) \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\} \end{aligned}$$

La première est la forme "Vect" et la seconde la forme "équation". Les deux formes ont leur utilités :

- La forme Vect permet de justifier immédiatement que F est un s.e.v. et de lui trouver une famille génératrice (qui n'est pas forcément une base de F).
- La forme équation permet de vérifier facilement si un vecteur donné de $\mathbb{R}^3$ est dans F ou non, et plus généralement d'exploiter l'information "$u \in F$" de manière simple.

C'est pourquoi il es t intéressant et utile de passer d'une forme à l'autre. Pour simplifier, on se place sur $E = \mathbb{R}^n$. Le passage de "équation" à "Vect" est plus facile et a été vu en TD et en exemple. L'autre passage mérite une méthode explicative. Pour simplifier, on se limite au cas où F est engendré par 3 vecteurs.

Méthode – Passer de "Vect" à "équation" dans $E = \mathbb{R}^n$

On se place sur l'e.v. $E = \mathbb{R}^n$. Soit $F = \mathrm{Vect}(u,v,w)$ qu'on veut mettre sous forme "équation". On se donne un vecteur $x = (x_1, \cdots, x_n)$ quelconque de $\mathbb{R}^n$ et on note $(u_1, \cdots, u_n)$ les coordonnées de u et idem pour v et w.

$$\begin{aligned} x \in F &\iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \qquad x = \alpha u + \beta v + \gamma w \\ &\iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 \\ x_2 = \alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 \\ \quad \vdots \\ x_n = \alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n \end{cases} \qquad \begin{array}{c} (u_1, v_1, w_1, \cdots, u_n, v_n, w_n \text{ seront connus}) \\ (x_1, \cdots, x_n \text{ sont des paramètres}) \\ (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ sont les inconnues}) \end{array} \\ &\iff \text{Le système suivant admet une solution : } \left(\begin{array}{ccc|c} u_1 & v_1 & w_1 & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n & v_n & w_n & x_n \end{array}\right) \end{aligned}$$

En échelonnant ce système, on obtiendra éventuellement des conditions de compatibilités de la forme $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$. Ce sont ces conditions qui formeront les équations de F. Par exemple :

$$F = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 2x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + \ldots + x_n = 0\}$$

8 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-e.v., on peut :

- Montrer que E est en fait un s.e.v. d'un e.v. usuel E'.
- Si E s'écrit comme un produit d'e.v., le munir de lois naturelles qui en font un e.v.
- En dernier recours, revenir à la définition (avec entre autres **EV1.–EV4.**).

Les espaces vectoriels usuels sont : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$, $\mathbb{K}^{\Omega}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}(X)$.

Remarquons également que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-e.v.

Méthode

Pour montrer qu'un ensemble F est un s.e.v. de E, on peut :

- Utiliser la caractérisation.
- Réécrire F comme $\mathrm{Vect}(X)$, qui est un s.e.v. par définition.
- Plus rarement, montrer que F est une somme ou une intersection de s.e.v.
- ...... (cf chapitres suivants !)

Méthode

Pour montrer que $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$ est égal à un s.e.v. F donné, on peut :

- Écrire la définition de $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$ et reconnaitre une écriture de F (Exemple 15 jusqu'à Exemple 18).
- Procéder par double inclusion : pour montrer que $F \subset \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$, il faut montrer qu'un vecteur *quelconque* de F s'écrit comme une CL de $u_1, \cdots, u_n$ en trouvant une CL possible au brouillon (Exemple 22).

Méthode

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, on peut :

- Montrer que c'est une famille libre ET génératrice.
- Montrer tout vecteur $u \in E$ s'écrit de manière unique comme CL des vecteurs $(e_1, \cdots, e_n)$.
- ...... (cf chapitres suivants !)

Méthode

Pour montrer que deux s.e.v. F et G sont supplémentaires, on peut :

- Montrer que $F + G = E$ et que $F \cap G = \{0_E\}$
- Montrer que tout vecteur $u \in E$ se décompose de manière unique en $u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$.
- ...... (cf chapitres suivants !)