Formulaire de développements limités usuels

On donne les formules pour les DL à l'ordre n (ou $2n$, ou $2n+1$), avec notamment le terme en x^n. Pour apprendre ces formules, il est conseillé d'en apprendre le *motif* : retenez le premier terme, puis le second, puis le troisième, jusqu'à ce que vous sachiez construire le DL à un ordre petit et fixé (par exemple 5 ou 6). Vous pouvez aussi vous aider des moyens mnémotechniques donnés.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

(termes d'ordre pair de e^x) $$\mathrm{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

(termes d'ordre impair de e^x) $$\mathrm{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

(ch avec alternance de signe) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

(sh avec alternance de signe) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

(quotient de sin et cos) $$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

($x \mapsto -x$ dans le DL ci-dessus) $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

(intégration du DL ci-dessus) $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$\left(x \mapsto x^2 \text{ dans le DL de } \dfrac{1}{1+x}\right)$ $$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$$

(intégration du DL ci-dessus) $$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\left(\alpha = \frac{1}{2},\ n=3\right) \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

$$(x \mapsto -x) \qquad \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$