Chapitre 25
Développements limités

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre :
- le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- n est un entier naturel.
- I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point.
- a est un point de I ou une extrémité ***finie*** de I.
- f et g designent des fonctions définies sur I ou sur $I \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Contrairement au chapitre précédent, le point a ne peut plus être infini. C'est donc un point de $\overline{I}$ avec la définition qui sera donnée en MP. Au chapitre précédent, on supposait que f et/ou g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a. Cette hypothèse n'est plus nécessaire ici car on considérera uniquement des petit-o sous la forme $o((x-a)^k)$ avec $k \in \mathbb{N}$, et la fonction $x \mapsto (x-a)^k$ ne s'annule pas sur tout voisinage épointé de a.

1 Introduction aux DL et au calcul avec des petit-o

1.1 Approximation et petit-o

On a vu dans le chapitre sur la dérivation que si f est dérivable en a, alors :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a) \times \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Ceci peut se réécrire :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x) \qquad \text{avec} \quad r(x) = \underset{x \to a}{o}(x-a)$$

ou encore, pour aller plus vite :

$$(\forall x \in I) \qquad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$$

Plus généralement un terme "$\underset{x \to a}{o}(g(x))$" peut être interprété comme une expression $r(x)$ négligeable devant $g(x)$ quand x tend vers a.

Remarque. L'idée principale de cette réécriture est de fournir une approximation. Quand x est très proche de a, on peut approximer la valeur de $f(x)$ par celle d'une fonction affine en x :

$$\text{"} \quad f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{"} \qquad (\text{pour } x \text{ proche de } a)$$

On réalise ainsi une erreur $r(x)$ qui tend vers 0 plus vite que $x-a$, donc qui devient très petite devant $f(a) + f'(a)(x-a)$ lorsque x est très proche de a. Cette approximation est donc d'autant plus "légitime" que x est proche de a. C'est effectivement ce qu'on observe en pratique : plus on se rapproche du point a, plus la courbe de f sera "proche" de sa tangente en a, par exemple :

$$e^x = 1 + x + \underset{x \to 0}{o}(x)$$

L'idée fondamentale des développements limités est d'aller plus loin qu'une approximation par un polynôme de degré 1. On verra par exemple qu'on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

Donc on peut approximer au voisinage de 0 la valeur de e^x par le polynôme de degré n ci-dessus. L'erreur commise sera un $\underset{x \to 0}{o}(x^n)$ et sera donc d'autant plus petite que x sera proche de 0 et n sera grand, comme le montre le tableau suivant :

x	0	$0,05$	$0,1$	1
e^x	1	$1,051$	$1,105$	$2,718$
Erreur relative de $e^x \approx 1+x \quad (n=1)$	0%	$0,12\%$	$0,46\%$	26%
Erreur relative de $e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2} \quad (n=2)$	0%	$0,002\%$	$0,02\%$	8%
Erreur relative de $e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6} \quad (n=3)$	0%	$0,00003\%$	$0,0004\%$	$1,9\%$

1.2 Généralités sur les DL

Définition 25.1 – Développement limité

On dit que f admet un DL à l'ordre n en a s'il existe $\alpha_0, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

Cela équivaut à dire que :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \\ \ldots + \alpha_n(x-a)^n + r(x) \qquad \text{avec} \quad r(x) = \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

Pour aller plus vite, on pourra écrire que "f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$". Par abus, on dira aussi qu'une expression $f(x)$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$.

Définition 25.2

Si f admet un DL à l'ordre n en a, le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ est appelé la partie régulière du DL.

Le terme $\underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right)$ est appelé le reste du DL.

Exemple 1 (Exemple important)**.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.

Rappel : on peut composer à droite dans un petit-o :

$$\begin{cases} u(x) \xrightarrow[x \to a]{} a' \\ f(y) = \underset{y \to a'}{o}\left(g(y)\right) \end{cases} \implies f(u(x)) = \underset{x \to a}{o}\left(g(u(x))\right)$$

Exemple 2 (Exemple important bis)**.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.

1.3 Asymétrie du signe $=$ avec des petit-o

Puisque $x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x)$, on a le droit d'écrire :

$$1+x+x^2 \quad = \quad 1+x+\underset{x\to 0}{o}(x) \quad = \quad (\dots)$$

Cependant, quand on s'apprête à continuer le calcul avec $(\dots)$, on a en quelque sorte "oublié" que ce $\underset{x\to 0}{o}(x)$ était à l'origine égal à x^2. Une fois "$\underset{x\to 0}{o}(x)$" écrit, on ne peut l'interpréter que comme une expression $r(x)$ telle que $r(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$, ou encore $x\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, ce qui est le cas de x^2, mais aussi de $2x^2$, ou de x^3 ou encore de $x\sqrt{|x|}$, etc. En effectuant cette transformation, on a donc **perdu de l'information de manière irréversible**. On ne peut donc PAS écrire :

$$\text{''} \quad 1+x+\underset{x\to 0}{o}(x) \quad = \quad 1+x+x^2 \quad \text{''} \qquad \text{(Faux !)}$$

En particulier, dans un calcul avec des petit-o, la relation $=$ n'est plus une relation d'équivalence : elle reste réflexive et transitive, mais n'est plus nécessairement symétrique. À tel point qu'oralement, on lira parfois ce signe $=$ en disant "est" au lieu de "égal" :

- $4x^3$ est (en particulier) un $\underset{x\to 0}{o}(x^2)$
- $4x^3$ est (en particulier) un $\underset{x\to 0}{o}(x)$
- Mais un $\underset{x\to 0}{o}(x^2)$ ou un $\underset{x\to 0}{o}(x)$ n'est pas nécessairement égal à $4x^3$.

Remarque. Cette règle peut sembler perturbante, mais elle n'intervient que lorsqu'on veut modifier des $o(\dots)$. Si on les laisse tels quels, alors le signe $=$ est bien symétrique. Le signe égal qui suit est par exemple symétrique :

$$(1+x)^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2) = 1+2x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

1.4 Opérations entre plusieurs petit-o

On a vu qu'un $\underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$ peut s'interprêter comme une expression $(x-a)^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$. Sur le même principe, un $\underset{x\to 0}{o}(x^n)$ peut s'interprêter comme une expression $x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Cependant, il faut garder à l'esprit que la fonction ε sera a priori différente pour chaque petit-o. Cela conduit à des règles de calcul particulières (on omet les "$x \to 0$" en indice), qu'il faut savoir retrouver :

Exemple 3. $o(x^n) \pm o(x^n) \quad = \quad o(x^n)$

Théorème 25.3 – Opérations entre plusieurs petit-o

(On omet de préciser "$x \to 0$" sous les petit-o). Pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$:

1. $$o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^{\min(n,m)})$$
2. $$\forall \lambda \in \mathbb{K}^* \qquad \begin{cases} \lambda o(x^n) = o(x^n) \\ o(\lambda x^n) = o(x^n) \end{cases}$$
3. $$o(x^n)o(x^m) \quad = \quad o(x^{n+m})$$
4. $$x^n o(x^m) \quad = \quad o(x^{n+m})$$
5. $$o(x^n)^m \quad = \quad o(x^{nm})$$
6. $$o\left(o(x^n)\right) \quad = \quad o(x^n)$$

Démonstration. On ne prouve que les assertions 3 et 6.

$\square$

1.5 Se ramener à un DL en 0

Théorème 25.4

La fonction f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ si et seulement si la fonction définie par $g(h) = f(a+h)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, càd s'il existe $\alpha_0, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$(g(h) =) \qquad f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

Cela équivaut à dire que :

$$\forall h \in \mathbb{R} \qquad a+h \in I \quad \Longrightarrow \quad f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k h^k + \widetilde{r}(h) \qquad \text{avec} \quad \widetilde{r}(h) = \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

Une fois le DL de $f(a+h)$ déterminé en 0, on peut repasser à la forme de la Définition 25.1 en posant $x = a+h$ et donc $h = x-a$. Grâce à cette propriété, quand on cherche le DL d'une fonction en a, on peut toujours se ramener à un DL d'une autre fonction en 0. On peut donc se contenter d'étudier les DL en 0, ce qu'on fera le plus souvent.

Exemple 4. Déterminer le DL à l'ordre 3 en 1 de la fonction $f(x) = e^x$.

2 Propriétés des DL

2.1 Unicité, parité, troncature

Théorème 25.5 – Unicité du DL

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, ce DL (à l'ordre n) est unique, i.e. la partie régulière associée à ce DL est unique.

Démonstration. Par le Théorème 25.4, il suffit de faire la preuve pour $a = 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\alpha_0, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ et $\beta_0, \cdots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tels que $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n) \neq (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_n)$ et

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

□

Théorème 25.6 – DL et parité

On suppose que f admet un *DL* à l'ordre n **en zéro** :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

- Si f est paire, alors pour tout indice k impair, $\alpha_k = 0$.
- Si f est impaire, alors pour tout indice k pair, $\alpha_k = 0$.

Démonstration.

□

Théorème 25.7 – Troncature du DL

On suppose que f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Alors, pour tout $m \in [\![0,n]\!]$, f admet un $\mathrm{DL}_m(a)$, obtenu en tronquant la partie régulière (on garde uniquement les termes de degré 0 à m) :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_m x^m + \underset{x\to 0}{o}(x^m)$$

Démonstration. Si $m = n$, le résultat est évident. On suppose à présent $m < n$. On a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k x^k + \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k x^k + x^n \varepsilon(x) \qquad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Alors,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{m} \alpha_k x^k + x^{m+1} \left(\sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k x^{k-(m+1)} + x^{n-(m+1)} \varepsilon(x) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \alpha_k x^k + x^{m+1} B(x) \qquad \text{avec } B \text{ une fonction bornée au voisinage de } 0 \\ &= \sum_{k=0}^{m} \alpha_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^m) \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Lemme 25.8 – DL et limite

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors f admet une limite finie en a. Plus précisément, si $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + \underset{x\to a}{o}(x^n)$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha_0$.

Démonstration. En effet, on peut tronquer ce DL à l'ordre 0 et en déduire que $f(x) = \alpha_0 + \underset{x\to a}{o}(1)$, ou encore que

$$f(x) = \alpha_0 + \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$$

On en déduit par somme de limites que $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha_0$. □

2.2 Formule de Taylor-Young, DL usuels

Théorème 25.9 – Formule de Taylor-Young

On suppose que $a \in I$. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$$

Démonstration. Sera démontrée plus loin dans le chapitre. □

En remplaçant x par $a+h$ (donc $x-a$ par h), on obtient une autre écriture du $\mathrm{DL}_n(a)$ de f :

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+\underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

En particulier, si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, elle admet un DL à tout ordre en tout point de I. La formule de Taylor-Young permet de déduire les DL des fonctions usuelles, cf le formulaire. **Ce formulaire est à connaitre !**

Exemple 5. Soit $n\in\mathbb{N}$. Déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de exp.

Exemple 6. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. Déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f : x\mapsto(1+x)^\alpha$.
f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-1,+\infty\right[$, donc par la formule de Taylor-Young elle admet un $\mathrm{DL}_n(0)$. Alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, on montre par récurrence que

$$\begin{aligned} f(x)&= & f(0)&=\\ f'(x)&= & f'(0)&=\\ f''(x)&= & f''(0)&=\\ &\vdots & &\vdots\\ f^{(n)}(x)&= & f^{(n)}(0)&= \end{aligned}$$

Donc

$$(1+x)^\alpha=$$

Connaissant le DL de $(1+x)^\alpha$ en 0 à tout ordre, on peut en déduire le DL de x^α en tout point à tout ordre par des jeux de réécriture et de composition :

Exemple 7. Déterminer le DL à l'ordre 2 en 3 de $f : x\mapsto\sqrt{x}$.

2.3 Somme et produit de DL

Théorème 25.10

On suppose que f, g admettent des $\mathrm{DL}_n(a)$.

1. Combinaison linéaire : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$.
2. Produit : la fonction $f \times g$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$.

Le Théorème ci-dessus n'a qu'un apport théorique. Pour calculer explictement ces DL, il vaut mieux retenir la méthode ci-dessous. On la donne pour le cas $a = 0$ par souci de concision, et parce que ce sera souvent le cas en pratique.

Méthode – Calcul du DL de $\lambda f + \mu g$ et de fg

On suppose que f, g admettent des $\mathrm{DL}_n(0)$, dont on notera P, Q les parties régulières respectives. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\ g(x) = Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \end{cases} \implies \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda P(x) + \mu Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\Searrow \quad f(x)g(x) = [P(x)Q(x)]_n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

où $\left[P(x)Q(x)\right]_n$ est une notation non officielle qui signifie qu'on ne garde que les termes du produit dont le degré est inférieur ou égal à n.

Pour calculer le DL d'un produit, il n'est pas nécessaire de calculer tous les termes du produit $P(x)Q(x)$! En effet, tout terme de la forme $\alpha_k x^k$ avec $k \geq n+1$ serait en particulier un $\underset{x\to 0}{o}(x^n)$, et donc sera absorbé dans le reste $\underset{x\to 0}{o}(x^n)$ à la fin de la ligne.

En un point a quelconque, il faudrait remplacer $P(x)$, $Q(x)$ et $\underset{x\to 0}{o}(x^n)$ par $P(x-a)$, $Q(x-a)$ et $\underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$ respectivement. Pour le produit, ce serait les termes de la forme $\alpha_k(x-a)^k$ avec $k > n$ qui seraient absorbés dans le reste $\underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$.

Exemple 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de la fonction ch.

On peut montrer de la même manière la formule du $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ de sh.

Pour avoir le DL à l'ordre n de $\lambda f + \mu g$, on est obligé d'avoir les DL à l'ordre n de f et de g. Pour le produit, *si on se fie uniquement à la méthode précédente*, pour calculer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de fg, il faudrait calculer les $\mathrm{DL}_n(0)$ de f et de g, puis on laisse les petit-o de côté et on se contente de déterminer le produit $[P(x)Q(x)]_n$. En réalité, il est *parfois* possible, par des astuces, d'éviter de calculer le DL de f et/ou de g jusqu'à l'ordre n, ce qui permet de gagner du temps.

Méthode – Calcul de DL avec petit-o incorporés

Pour calculer le DL d'un produit $f(x)g(x)$, d'une composée $(g \circ f)(x)$, etc. L'idée générale est de substituer les fonctions par leur DL complet, **en incorporant les petit-o**, et d'exploiter les règles de calcul de la section 1.4 pour se rendre compte qu'on peut ne pas calculer les DL jusqu'à l'ordre n pour f et pour g.

L'astuce fonctionnera si, lorsqu'on cherche un DL à l'ordre n, le calcul conduit à des restes en $\underset{x\to 0}{o}(x^N)$ avec $N \geq n$.

ASTUCE DU PRO. Pour calculer le DL d'un produit fg à l'ordre n :

- si le premier terme (non nul) du DL de f est $\alpha_1 x$, alors il suffit d'avoir le DL de g à l'ordre $n-1$.
- si le premier terme (non nul) du DL de f est $\alpha_2 x^2$, alors il suffit d'avoir le DL de g à l'ordre $n-2$.
- etc.

Bien sûr, cela marche aussi dans l'autre sens : on peut échanger les rôles de f et g dans les items ci-dessus.

ASTUCE DU PRO. Si on veut le DL à l'ordre $\boxed{2n}$ de $f(x^2)$, il suffit d'avoir le DL à l'ordre $\boxed{n}$ de $f(x)$ et de composer à droite par x^2 :

$$f(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x^2) = P(x^2) + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$$

et cela donne aussi le DL à l'ordre $2n+1$ de $f(x^2)$ car la fonction $x \mapsto f(x^2)$ est paire... donc le terme de degré $2n+1$ est nul : $f(x^2) = P(x^2) + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$.

Exemple 9. Déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de $\mathrm{sh}(x^2)\sin x$.

2.4 Composition et inverse de DL

On rappelle (Lemme 25.8) que si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors f admet nécessairement une limite finie en a.

Théorème 25.11 – Composition de DL

On suppose que :

- f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$. On notera $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.
- g admet un $\mathrm{DL}_n(b)$, où g est une fonction définie sur $f(I)$ ou sur $f(I)\setminus\{b\}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Alors $g\circ f$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$.

À nouveau, ce Théorème n'a qu'une valeur théorique, et la méthode qui suit est beaucoup plus utile dans un calcul pratique. On l'énonce dans le cas $a=b=0$ car, quitte à changer g et f, on peut toujours s'y ramener. En particulier, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ et on verra qu'alors le terme α_0 du $\mathrm{DL}_n(0)$ de f est nul.

Méthode – Calcul du DL de $g\circ f$

On suppose que f, g admettent des $\mathrm{DL}_n(0)$, dont on notera P, Q les parties régulières respectives.

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\ g(x) = Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \end{cases} \implies (g\circ f)(x) = [(Q\circ P)(x)]_n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

où $\left[(Q\circ P)(x)\right]_n$ est une notation non officielle qui signifie qu'on ne garde que les termes de la composée dont le degré est inférieur ou égal à n.

Par le Lemme 25.8, la condition $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ signifie que le DL de $f(x)$ en 0 ne contient pas de terme constant, i.e. est de la forme $f(x) = 0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_n x^n + \underset{x\to a}{o}(x^n)$. Cela revient encore à dire que $P(0)=0$.

ASTUCE DU PRO++. Si on veut le DL à l'ordre n de $g\circ f$, et que le premier terme (non nul) du DL de f commence par $\alpha_2 x^2$, alors il suffit d'avoir le DL de g à un ordre m tel que $2m\geq n$.
Idem si le premier terme (non nul) du DL de g commence par $\beta_2 x^2$, il suffit d'avoir le DL de f jusqu'à un ordre m tel que $2m \geq n$. Cela se généralise aussi aux cas où les premiers termes (non nuls) sont d'ordre 3, 4, etc.

Exemple 10. Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\sqrt{\cos x}$.

Théorème 25.12 – Inverse de DL

On suppose que f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$. Alors $\dfrac{1}{f}$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$.

À nouveau (bis), ce Théorème n'a qu'une valeur théorique, et la méthode qui suit est beaucoup plus utile dans un calcul pratique. On l'énonce dans le cas $a = 0$ car, quitte à changer f, on peut toujours s'y ramener.

Méthode – Calcul du DL de $\dfrac{1}{f}$

On suppose que f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$. Alors :

$$\begin{cases} f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\ \alpha_0 \neq 0 \end{cases} \implies \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \underset{x\to 0}{o}(x^n)} = \frac{1}{\alpha_0} \times \frac{1}{1 - \underbrace{\left[-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_0}x + \ldots + \underset{x\to 0}{o}(x^n)\right]}_{X}}$$

et on remarque que $X \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, ce qui permet de faire une composition en utilisant le DL de $\dfrac{1}{1-X}$ en 0.

L'hypothèse $\alpha_0 \neq 0$ équivaut à $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$. Enfin, pour avoir le DL de $\dfrac{f}{g}$, il suffit de faire le DL de f multiplié par le DL de $\dfrac{1}{g}$.

Exemple 11. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\tan x$.

Remarque. Si $\alpha_0 = 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ n'admet pas de DL en 0 (car $\dfrac{1}{f}$ n'admet pas de limite finie en 0). Toutefois, il se peut que $\dfrac{g}{f}$ admette un DL en 0 par compensation, en utilisant la forme normalisée des DL, cf section 3.3.

2.5 Liens entre DL, limite, dérivabilité

Théorème 25.13 – $\mathrm{DL}_0(a)$ et existence d'une limite en a

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$, qu'on note $f(x) = \alpha_0 + \underset{x\to a}{o}(1)$
2. f admet une limite finie en a.

Si ces assertions sont vérifiées, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha_0$.

En particulier :

- Si f est définie en a alors $f(a) = \alpha_0 = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ donc f est continue en a.
- Si f n'est pas définie en a, alors on peut la prolonger par continuité en a en posant $f(a) := a_0$.

Théorème 25.14 – $\mathrm{DL}_1(a)$ et dérivabilité en a

On suppose f définie en a. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$, qu'on note $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$
2. f est dérivable en a.

Si ces assertions sont vérifiées, alors $f(a) = \alpha_0$ et $f'(a) = \alpha_1$.

Attention : même si f vérifie les assertions 1 et 2 du Théorème 25.14, on ne peut pas en déduire que f est $\mathscr{C}^1$ en a, i.e. que f' est continue en a, comme le montre le contre-exemple ci-dessous.

Remarque (Erreur fréquente)**.** Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ avec $n \geq 2$, on ne peut pas en déduire que f est n fois dérivable en a, cf exemple ci-dessous.

Exemple 12. On pose $f(x) := x^3 \sin \frac{1}{x^2}$. Alors $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, ce qui est un $\mathrm{DL}_2(0)$, de partie régulière nulle. Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Cependant, par la formule de Taylor-Young (Théorème 25.9), **si** f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et que $a \in I$, **alors** f admet un $DL_n(a)$.

Remarque. En particulier, si f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$, alors on a toujours $f(x) = \left[f(a) + f'(a)(x-a)\right] + \underset{x\to a}{o}(x-a)$. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est directement donnée par la partie régulière du $\mathrm{DL}_1(a)$ de f.

2.6 Intégrations de DL

On admet pour le moment l'inégalité de la moyenne : pour toute fonction f continue sur $\left[a,b\right]$, donc avec $a \le b$, on a $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$. En particulier, si $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\left|\int_0^x f\right| \le \int_0^x |f|$.

Théorème 25.15 – Intégration d'un DL

On suppose que f est continue sur I. Soit F une primitive de f sur I. Si f admet un $DL_n(a)$ donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

alors F admet un $DL_{n+1}(a)$ donné par :

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

On remarque au passage qu'une primitive de $(x-a)^k$ est $\frac{1}{k+1}(x-a)^{k+1}$. Autrement dit, on peut "primitiver" terme à terme la partie régulière et le petit-o. Attention à bien rajouter $F(a)$!

Démonstration. On ne fait la preuve que dans le cas $a = 0$. Par hypothèse, il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{K}$ telle que $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$ et

$$\forall t \in I \qquad f(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k + t^n \varepsilon(t) \tag{$*$}$$

La fonction ε est donc définie par :

$$\varepsilon(t) := \begin{cases} \dfrac{f(t) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k}{t^n} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On montre facilement que ε est continue sur $I \setminus \{0\}$ et aussi en 0. Elle est donc continue sur I. En particulier, toutes les fonctions de $(*)$ sont continues et donc on peut les intégrer. Soit $x \in I$. On intègre $(*)$ selon t entre 0 et x :

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k + t^n \varepsilon(t) \right) dt$$

Comme F est une primitive de f,

$$\begin{aligned} F(x) - F(0) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_0^x t^k dt + \int_0^x t^n \varepsilon(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x + \int_0^x t^n \varepsilon(t) dt \end{aligned}$$

D'où

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x t^n \varepsilon(t) dt$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $\displaystyle\int_0^x t^n \varepsilon(t)dt = \underset{x \to 0}{o}(x^{n+1})$, ou encore de montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \varepsilon(t)dt = 0$. C'est une limite épointée en 0, il suffit de montrer que la limite est nulle en 0^+ et en 0^-. On va faire la preuve uniquement en 0^+. Soit donc $x \in I \cap \mathbb{R}_+^*$. Par l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x t^n \varepsilon(t) dt \right| &\leq \int_0^x |t^n \varepsilon(t)| dt \\ &= \int_0^x t^n . |\varepsilon(t)| dt \qquad \text{car } t \in [0, x] \\ &\leq \int_0^x x^n . |\varepsilon(t)| dt \\ &= x^n . \int_0^x |\varepsilon(t)| dt \\ &\leq x^n . \int_0^x M(x) dt \qquad \text{avec } M(x) = \max_{y \in [0,x]} |\varepsilon(y)| \\ &= x^{n+1} M(x) \end{aligned}$$

Ainsi comme $x \neq 0$, on a

$$\left| \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \varepsilon(t) dt \right| \leq M(x) = \max_{y \in [0,x]} |\varepsilon(y)|$$

Or, comme $\lim\limits_0 \varepsilon = 0$, on peut montrer que $M(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$. D'où $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left| \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \varepsilon(t) dt \right| = 0$. $\square$

Exemple 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $F : x \mapsto \ln(1+x)$.

Exemple 14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de arctan.

On peut obtenir de même les DL de arcsin et arccos.

Remarque (Preuve rapide de Taylor-Young)**.** Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et $a \in I$. Alors $f^{(n)}$ est continue et admet donc un $\mathrm{DL}_0(a)$:

$$f^{(n)}(x) = f^{(n)}(a) + \underset{x \to a}{o}(1)$$

En intégrant ce DL, on trouve

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)\,x + \underset{x \to a}{o}(x)$$

et donc $f^{(n-1)}$ admet un $\mathrm{DL}_1(a)$. En réintégrant :

$$f^{(n-2)}(x) = f^{(n-2)}(a) + f^{(n-1)}(a)\,x + f^{(n)}(a)\,\frac{x^2}{2} + \underset{x \to a}{o}(x^2)$$

donc $f^{(n-2)}$ admet un $\mathrm{DL}_2(a)$, etc. Par récurrence, on montre donc que la fonction $f^{(0)}$, càd f, admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par le Théorème 25.9.

Remarque (Erreur fréquente)**.** Si f est dérivable et admet un DL_n en a, cela ne veut pas dire que f' admet un $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$ qu'on obtiendrait par dérivation terme à terme du $\mathrm{DL}_n(a)$ de f. Contre-exemple : on pose

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad f(x) = \underset{x \to 0}{o}(x)$$

Ainsi, f admet un $\mathrm{DL}_1(0)$. On montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Supposons par l'absurde que f' admet un $\mathrm{DL}_0(0)$. Alors par le Théorème 25.13, f' serait continue en 0. Or, on peut vérifier que f' n'est pas continue en 0 car le terme $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0. Contradiction.

Remarque. Cependant, **si f est de classe $\mathscr{C}^n$**, alors f' est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ et par le Théorème 25.9, on sait que f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et f' admet un $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$. Dans ce cas, on peut affirmer que le DL de f' s'obtient en dérivant celui de f.

3 Applications des développement limités

Hypothèse

Dans le reste du chapitre, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3.1 Obtention d'équivalents, étude du signe local

Définition 25.16 – Forme normalisée

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$$

Si $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n) \neq (0, \cdots, 0)$, en notant $p \in [\![0, n]\!]$ le plus petit entier tel que $\alpha_p \neq 0$, on a

$$f(x) = \underbrace{\alpha_p}_{\neq 0}(x-a)^p + \alpha_{p+1}(x-a)^{p+1} + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$$

Cette écriture est appelée <u>forme normalisée</u> (terme non officiel) du $\mathrm{DL}_n(a)$ de f.

Cette forme normalisée n'existe que si la partie régulière du DL de f est non nulle. C'est un analogue à la forme normalisée d'un polynôme, sauf que l'on s'intéresse au plus petit coefficient non nul et non au plus grand. Cette forme normalisée permet d'obtenir un équivalent de f en a :

Théorème 25.17 – Passer d'un DL à un équivalent

Supposons que f admet un $DL_n(a)$ sous forme normalisée :

$$f(x) = \alpha_p(x-a)^p + \alpha_{p+1}(x-a)^{p+1} + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$$

Alors,

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} \alpha_p(x-a)^p$$

En particulier, f est du signe (strict) de $\alpha_p(x-a)^p$ au voisinage de a.

Démonstration. En effet, en tronquant le DL au rang p, on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \alpha_p(x-a)^p + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^p\right) \\
&= \alpha_p(x-a)^p + \underset{x\to a}{o}\left(\alpha_p(x-a)^p\right) \qquad \text{car } \alpha_p \neq 0 \\
&= g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x))
\end{aligned}$$

avec $g(x) := \alpha_p(x-a)^p$. Or, on a vu au chapitre précédent que si $f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. D'où le résultat. □

Les DL permettent notamment de calculer facilement un équivalent d'une somme : il suffit de chercher un DL normalisé de cette somme (et contrairement aux équivalents, on peut additionner les DL !). Obtenir ces équivalents permet entre autres de calculer plus facilement des limites. Mais cela sert aussi à étudier le signe local, en particulier :

Méthode

- Pour trouver l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a, il suffit de trouver le $\mathrm{DL}_1(a)$ de f, cf la dernière Remarque sous le Théorème 25.14.
- Pour trouver si a est un maximum local ou un minimum local, on peut étudier le signe local de l'expression $f(x) - f(a)$ en cherchant un équivalent (par exemple avec un DL normalisé en a).
- Pour trouver la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport sa tangente en a, on peut étudier le signe local de $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ en cherchant un équivalent (par exemple avec un DL normalisé en a).

Trouver un DL normalisé de $f(x) - f(a)$ revient à trouver un DL de $f(x)$ avec un coefficient non nul après $f(a)$, donc à partir de l'ordre 1. Idem pour $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ où il faut aller chercher un terme non nul après $f(a) + f'(a)(x-a)$, donc à partir de l'ordre 2.

Exemple 15. On pose $f : x \mapsto \mathrm{ch}(x^3) - \mathrm{sh}(x^3)$. Donner l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en 0, puis la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T (au voisinage de 0).
Est-ce que f admet un extremum local en 0 ?

Exemple 16. On pose $f : x \mapsto \operatorname{ch}(x^2) - \operatorname{sh}(x^2)$. Est-ce que f admet un extremum local en 0 ?

3.2 Extrema locaux : conditions du second ordre

Rappel : on suppose f dérivable. Si f admet un extremum local en un point a intérieur à I, alors nécessairement a est un point critique, i.e. $f'(a) = 0$.

Il ne s'agit que d'une condition *nécessaire*, la réciproque est fausse : 0 est un point critique de $f(x) = x^3$, mais ce n'est pas un extremum local.

Théorème 25.18 – Conditions d'optimalité du second ordre

Soit a un point intérieur de I et $f \in \mathscr{C}^2(I)$.
Conditions nécessaires du second ordre :

- Si f admet un minimum local en a, alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geq 0$.
- Si f admet un maximum local en a, alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \leq 0$.

Conditions suffisantes du second ordre :

- Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local (strict) en a.
- Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local (strict) en a.

Démonstration. Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a implique qu'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + (x-a)^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

Preuve des conditions nécessaires : on ne montre que le premier item. Si f admet un minimum local en a, alors a est un point critique donc $f'(a) = 0$. Ainsi, on a

$$\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + (x-a)^2\varepsilon(x) = f(x) - f(a)$$

De plus, $f(x) - f(a) \geq 0$ pour x suffisament proche de a. Ainsi, pour $|x-a|$ assez petit,

$$\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + (x-a)^2\varepsilon(x) \geq 0$$

En supposant $x \neq a$, en divisant par $(x-a)^2$ et en prenant la limite quand x tend vers a, on obtient $\frac{1}{2}f''(a) \geq 0$. D'où le résultat.

Preuve des conditions suffisantes : on ne montre que le premier item. On suppose $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, donc :

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2)$$

Comme $\frac{1}{2} f''(a) \neq 0$, il s'agit d'un DL de $f(x) - f(a)$ sous forme normalisée. Ainsi,

$$f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

et en particulier, $f(x) - f(a)$ a le même signe local (strict) que $\frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$. Ainsi, a est un minimum local (strict). □

Remarque. Si $f'(a) = f''(a) = 0$, tous les cas sont possibles (maximum, minimum, pas d'extremum en a). Par exemple $f(x) = x^2$ et $f(x) = \pm x^4$ avec $a = 0$.

Dans la pratique, si on cherche les extrema locaux d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, on dressera plutôt un tableau de variations (ce qui permet aussi de vérifier si un extremum est global). C'est une méthode en général plus efficace que d'utiliser les conditions suffisantes du second ordre. Cependant, ces conditions se généralisent aux cas où f est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, dans $\mathbb{R}^3$, etc. et deviennent alors des outils indispensables !

3.3 DL de $\frac{g}{f}$

Cette partie sert de complément à la partie de calcul d'un DL. On souhaite calculer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\frac{g}{f}$. On suppose que f admette un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme $\alpha_0 + \ldots + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. Si $\alpha_0 \neq 0$, on a vu qu'on pouvait calculer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\frac{1}{f}$, et en déduire celui de $\frac{g}{f}$ par produit. Cependant, si $\alpha_0 = 0$, alors $\frac{1}{f}$ n'admet pas de DL, mais il est possible que $\frac{g}{f}$ en admette un. Pour cela, il faut d'abord calculer les DL de f et g sous forme normalisée :

$$g(x) = \beta_q x^q + \ldots + \beta_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \qquad \text{avec } \beta_q \neq 0$$

$$f(x) = \alpha_p x^p + \ldots + \alpha_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \qquad \text{avec } \alpha_p \neq 0$$

puis, si $q \geq p$, alors $\frac{g}{f}$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ car en divisant par x^p au numérateur et au dénominateur, on obtient :

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\beta_q x^{q-p} + \ldots + \underset{x\to 0}{o}(x^{n-p})}{\alpha_p + \ldots + \underset{x\to 0}{o}(x^{n-p})}$$

et on peut trouver un DL de $\dfrac{1}{\alpha_p + \ldots + \underset{x\to 0}{o}(x^{n-p})}$ par les méthodes connues. Si par contre $q < p$, alors $\frac{g}{f}$ n'admet pas de DL en 0 (car elle n'admet pas de limite finie en 0).

3.4 Développements asymptotiques (DA)

Définition 25.19

Soit $g_1, \cdots, g_n$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. La famille $(g_k)_{1\leq k\leq n}$ forme une échelle de comparaison au voisinage de a si pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $g_{k+1} = \underset{a}{o}(g_k)$.
On dit que f admet un développement asymptotique (DA) en a selon la famille $(g_k)_{1\leq k\leq n}$ si :

$$f(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x) + \underset{x\to a}{o}(g_n(x))$$

Comme n fonctions apparaissent, on dit que ce DA est à n termes. On peut également dire qu'il s'agit d'un DA à la précision $g_n(x)$, la fonction dans le petit-o.

Ci-dessous on commet l'abus de remplacer g_k par $g_k(x)$ pour plus de clarté.

Exemple 17. Si a est fini, alors la famille $\left((x-a)^k\right)_{0\leq k\leq n}$ est une échelle de comparaison au voisinage de a. f admet un DA en a selon cette famille ssi f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$.

Exemple 18. La famille $\left(\frac{1}{x^k}\right)_{0\leq k\leq n}$ est une échelle de comparaison au voisinage de $+\infty$. En écrivant le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\ln(1+X)$ et en composant à droite avec $X = \frac{1}{x}$, on obtient le DA suivant à $n+1$ termes :

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{nx^n} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Les suites peuvent également faire l'objet de DA mais ce sera toujours en $+\infty$ pour la variable n. Des suites $(u, v, w, \cdots)$ forment une échelle de comparaison (en $+\infty$) si $u_n = o(v_n)$, $v_n = o(w_n)$, etc.

Méthode

Pour trouver un DA en a d'une expression $f(x)$, on cherche d'abord un équivalent : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi_0(x)$, puis on cherche une fonction φ_1 telle que $f(x) - \varphi_0(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi_1(x)$, puis on cherche une fonction φ_2 telle que $f(x) - \varphi_0(x) - \varphi_1(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi_2(x)$, et ainsi de suite.
Si on s'arrête à φ_2, on obtient le DA : $f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \underset{x\to a}{o}(\varphi_2(x))$.

La méthode est similaire pour une suite.

Exemple 19. Réaliser un développement asymptotique à trois termes de $\sqrt{n^2+1}$.

3.5 Asymptotes obliques

Définition 25.20

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = \alpha x + \beta$ si $f(x) - (\alpha x + \beta) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

On définit de même la notion d'asymptote oblique en $-\infty$.

Pour parler d'asymptote oblique, la fonction f peut n'être définie qu'au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$. Par souci de simplicité, on considère ici que $D_f = \mathbb{R}$. L'objectif est de déterminer l'asymptote oblique de f en $+\infty$ et la position relative de $\mathscr{C}_f$ avec cette asymptote au voisinage de $+\infty$. On peut adapter facilement cela au cas où l'asymptote est en $-\infty$.

Méthode – Équation et position relative selon une asymptote oblique en $+\infty$

1. On cherche un DA en $+\infty$ de $f(x)$ selon la famille $(x, 1)$:

$$f(x) = \alpha x + \beta + \underset{x \to +\infty}{o}(1)$$

   Dans ce cas, $y = \alpha x + \beta$ est l'équation de l'asymptote oblique de f en $+\infty$. *Note* : il est parfois plus facile de chercher un DA de $\dfrac{f(x)}{x}$ selon $\left(1, \dfrac{1}{x}\right)$ puis de tout multiplier par x.

2. Pour avoir la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de l'asymptote, il faut déterminer un équivalent de $f(x) - (\alpha x + \beta)$ en $+\infty$. Il faut donc obtenir un terme non nul supplémentaire dans le DA.

Exemple 20. On pose $f(x) = \sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\beta \neq \alpha^2$. Montrer que f admet une asymptote oblique et déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de cette asymptote oblique (à discuter selon α et β).

Remarque. Si $\beta = \alpha^2$, alors $\dfrac{1}{2}(\beta - \alpha^2) = 0$ et donc on ne dispose plus d'un équivalent de $f(x) - (x + \alpha)$ en $+\infty$, ce qui nous forcerait à aller plus loin dans le DA... Mais fort opportunément, lorsque $\beta = \alpha^2$, on a $f(x) = \sqrt{(x+\alpha)^2} = x + \alpha$ pour $x \geq -\alpha$. Donc au voisinage de $+\infty$, $\mathscr{C}_f$ est confondue avec son asymptote oblique.

4 Méthodes pour les exercices

Le plus important dans ce chapitre est de bien savoir réaliser des combinaisons linéaires, des produits, des composées, des passages à l'inverse et des intégrations dans les DL ! Ainsi que de connaitre les DL du formulaire.

Méthode

Pour calculer un équivalent, on peut :

- Utiliser les méthodes du chapitre précédent.
- Calculer un DL sous forme normalisé et passer à l'équivalent.

Méthode

Pour calculer la limite d'une expression avec une forme indéterminée, on peut :

- Chercher à lever l'indétermination par des réécritures, par les croissances comparées, l'utilisation de taux d'accroissement, ...
- Chercher un équivalent de l'expression (ce qui peut nécessiter de passer par un DL sous forme normalisé).

Méthode

Pour déterminer le signe au voisinage de a d'une expression, on calcule son équivalent en a.

- Pour déterminer si a (fini) est un extremum local de f, il suffit d'étudier le signe local de $f(x)-f(a)$ au voisinage de a.
- Pour déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à toute autre courbe (tangente, asymptote oblique, etc.) d'équation $y=g(x)$, il suffit d'étudier le signe local de $f(x)-g(x)$ au voisinage de a.

Méthode

Pour calculer un développement asymptotique de $f(x)$:

- Si possible, faire apparaitre un DL (éventuellement avec une composition à droite, cf exemple 18).
- Chercher un équivalent $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi_0(x)$, puis une fonction φ_1 telle que $f(x)-\varphi_0(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi_1(x)$, puis une fonction φ_2 telle que $f(x)-\varphi_0(x)-\varphi_1(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi_2(x)$, et ainsi de suite.