Chapitre 24

Relations de comparaison

Plan du chapitre

1 **Relations de comparaison sur les fonctions** 2
- 1.1 Domination et négligeabilité 2
- 1.2 Propriétés du grand-O et du petit-o 3
- 1.3 Fonctions équivalentes 5
- 1.4 Produit, puissance avec les équivalents 6
- 1.5 Somme et équivalents 7
- 1.6 Les équivalents à connaitre 9
- 1.7 Autres propriétés des équivalents 10
- 1.8 Composition avec les petit-o, grand-O et équivalents 10

2 **Relations de comparaison pour les suites** 12
- 2.1 Définitions et exemples 12
- 2.2 Signification asymptotique de o, O et $\sim$ pour des suites 13
- 2.3 Propriétés des relations de comparaison (suites) 14

3 **Méthodes pour les exercices.** 16

Hypothèse

Dans tout ce chapitre :

- Le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point.
- a est un point de I ou une extrémité (finie ou infinie) de I.
- f et g designent des fonctions définies sur I ou sur $I \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a, i.e.
  - Si $a = +\infty$, alors cela signifie qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I \cap \big[M, +\infty\big[$.
  - Si $a = -\infty$, alors cela signifie qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I \cap \big]-\infty, M\big]$.
  - Si a est fini, alors cela signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I \cap \Big(\big]a-\varepsilon, a\big[\cup \big]a, a+\varepsilon\big[\Big)$.

Cette dernière hypothèse permet de dire que le quotient $\dfrac{1}{g(x)}$ a un sens pour toute valeur $x \neq a$ qui est "assez proche de a". Cette hypothèse permettra de pouvoir écrire "$O(g(x))$" et "$o(g(x))$", cf plus bas.

1 Relations de comparaison sur les fonctions

1.1 Domination et négligeabilité

Définition 24.1 – Fonction dominée / négligeable selon une autre

On dit que :

- f est dominée par g au voisinage de a, si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée sur un voisinage épointé de a. On note alors :
$$f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x)) \qquad \text{ou} \qquad f = \underset{a}{O}(g)$$
- f est négligeable devant g au voisinage de a, si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note alors :
$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \qquad \text{ou} \qquad f = \underset{a}{o}(g)$$

  On dit aussi que g est prépondérante devant f.

L'hypothèse que g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a est essentielle pour que ces notions aient un sens.
Par abus, on confondra souvent f et $f(x)$ et on dira que $f(x)$ est négligeable devant / dominée par $g(x)$ au voisinage de a.

Théorème 24.2 – Rappel

Si une fonction admet une limite *finie* en a, alors cette fonction est bornée au voisinage (épointé ou non) de a.

Corollaire 24.3

Si $f = \underset{a}{o}(g)$, alors $f = \underset{a}{O}(g)$. La réciproque est fausse.

Démonstration. Si $\frac{f}{g}$ tend vers 0 en a, alors par le théorème ci-dessus, $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.
La réciproque est fausse, cf ci-dessous pour un contre-exemple. □

Exemple 1.
- $x^2 + 2x$ est dominée par x^2, i.e. $x^2 + 2x = \underset{x\to+\infty}{O}(x^2)$ car $\frac{x^2+2x}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$: la fonction ayant une limite finie en $+\infty$, elle est bornée au voisinage de $+\infty$.
  - Cependant $x^2 + 2x$ n'est pas négligable devant x^2 au voisinage de $+\infty$ car cette limite ne vaut pas zéro.
- $x^2 + 2x = \underset{x\to 0}{O}(2x)$ car ....
- $\ln x = \underset{x\to 0}{O}\left(\frac{1}{x}\right)$ car ....
- Pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on a $\sin x = \underset{x\to a}{O}(1)$.
- f est bornée sur un voisinage épointé de a si et seulement si $f = \underset{a}{O}(1)$.

Exemple 2. ○ $\arctan x \underset{x\to+\infty}{=} o\,(e^x)$

- ○ $\ln x \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$
- ○ f tend vers 0 en a si et seulement si $f = \underset{a}{o}(1)$.

Remarque. Comparer deux fonctions f et g au voisinage de a revient à donner une relation de comparaison entre f et g au voisinage de a. Comme le petit-o est plus précis que le grand-O, il faut rechercher un petit-o d'abord.

Exemple 3. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$. Comparer x^α et x^β au voisinage de 0 et de $+\infty$.

- ○
- ○
- ○ Si l'hypothèse était $\alpha \leq \beta$, il aurait fallu remplacer chaque petit-o ci-dessus par des grand-O.

Théorème 24.4 – Reformulation des croissances comparées

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$.

$$(\ln x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\,(x^\beta) \qquad \text{et} \qquad |\ln x|^\alpha \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

$$x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\,(e^{\beta x}) \qquad \text{et} \qquad e^{\beta x} \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$$

Remarque. Malgré le signe égal, il faut bien garder à l'esprit que $f(x) \underset{x\to a}{=} o\,(g(x))$ n'exprime pas une égalité mais une limite. Cela signifie que plus x se "rapproche" de a, plus $f(x)$ est "négligeable" devant $g(x)$. En dehors de cette limite, cela ne donne aucune information sur f et sur g.

Remarque. On ne peut pas écrire $\cancel{1 \underset{x\to+\infty}{=} O\,(\sin x)}$ (et idem avec un petit-o) car la fonction $x \mapsto \sin x$ s'annule sur tout voisinage de $+\infty$. Ainsi, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$ n'est pas définie sur un tel voisinage (et donc n'est a fortiori pas bornée).
Par contre, on peut écrire $\sin x \underset{x\to 0}{=} O\,(x)$: en effet, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est définie sur $]-1,0[\,\cup\,]0,1[$ donc sur un voisinage épointé en 0.

1.2 Propriétés du grand-O et du petit-o

Les relations $\underset{a}{o}$ et $\underset{a}{O}$ ne sont pas des relations binaires car dans les écritures $f = \underset{a}{o}(g)$ et $f = \underset{a}{O}(g)$, les fonctions f et g n'appartiennent pas techniquement au même ensemble (la fonction g ne doit pas s'annuler sur un voisinage épointé de a). Toutefois, cela peut aider à "fixer les idées" de s'autoriser un tel abus.

Exemple 4. La relation O est-elle réflexive ? symétrique ? antisymétrique ?

Exemple 5. La relation o est-elle réflexive ? symétrique ?

Théorème 24.5 – Transitivité de O et o

Soit h une fonction qui vérifie les mêmes hypothèses que g.

$$f \underset{a}{=} O(g) \quad \text{et} \quad g \underset{a}{=} O(h) \quad \Longrightarrow \quad f \underset{a}{=} O(h)$$
$$f \underset{a}{=} O(g) \quad \text{et} \quad g \underset{a}{=} o(h) \quad \Longrightarrow \quad f \underset{a}{=} o(h)$$
$$f \underset{a}{=} o(g) \quad \text{et} \quad g \underset{a}{=} O(h) \quad \Longrightarrow \quad f \underset{a}{=} o(h)$$

Démonstration. Pour la première implication, si $\frac{f}{g}$ et $\frac{g}{h}$ sont bornées au voisinage de a, alors il en va de même pour $\frac{f}{h} = \frac{f}{g} \times \frac{g}{h}$. Donc $f \underset{a}{=} O(h)$.
Pour la seconde implication, si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a et que $\frac{g}{h}$ tend vers zéro en a, alors par produit, $\frac{f}{h} = \frac{f}{g} \times \frac{g}{h}$ tend vers zéro en a. Idem pour la troisième implication. □

Théorème 24.6 – Opérations avec O et o

Soit f_1, f_2 deux fonctions définies sur I ou $I \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ (comme f).

1. Combinaison linéaire : pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$f_1 \underset{a}{=} O(g) \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{=} O(g) \Longrightarrow \alpha f_1 + \beta f_2 \underset{a}{=} O(g)$$
$$f_1 \underset{a}{=} o(g) \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{=} o(g) \Longrightarrow \alpha f_1 + \beta f_2 \underset{a}{=} o(g)$$

2. Multiplication par une constante : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$,

$$f \underset{a}{=} O(g) \iff \lambda f \underset{a}{=} O(\mu g)$$
$$f \underset{a}{=} o(g) \iff \lambda f \underset{a}{=} o(\mu g)$$

3. Produit : soit g_1, g_2 deux fonctions qui vérifient les mêmes hypothèses que g.

$$f_1 \underset{a}{=} O(g_1) \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{=} O(g_2) \Longrightarrow f_1 f_2 \underset{a}{=} O(g_1 g_2)$$
$$f_1 \underset{a}{=} O(g_1) \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{=} o(g_2) \Longrightarrow f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$$

Démonstration. Pour les o, c'est immédiat par opérations sur les limites. Pour les O, il faut revenir à la définition. Par exemple pour la première assertion :

- si $\frac{f_1}{g}$ (resp. $\frac{f_2}{g}$) est bornée sur un voisinage épointé V_1 (resp. V_2) de a,
- alors $V_1 \cap V_2$ est un voisinage épointé de a et $\alpha \frac{f_1}{g} + \beta \frac{f_2}{g}$ est bornée sur $V_1 \cap V_2$ car $\frac{f_1}{g}$ et $\frac{f_2}{g}$ le sont. □

1.3 Fonctions équivalentes

Hypothèse

Dans cette section, on suppose que f vérifie les mêmes hypothèses que g, à savoir que f ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a.

Définition 24.7

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \qquad \text{ou} \qquad f \underset{a}{\sim} g$$

On dit également que g est équivalente à f au voisinage de a. Par abus, on confondra souvent f et $f(x)$ ainsi que g et $g(x)$ et on pourra dire "$g(x)$ est équivalent à $f(x)$".

Remarque. On ne doit **jamais** écrire "0" d'un côté ou de l'autre d'un équivalent : $\cancel{f \underset{a}{\sim} 0}$ ou $\cancel{0 \underset{a}{\sim} f}$. En effet ceci sera toujours faux car les fonctions "$\dfrac{f}{0}$" ou $\dfrac{0}{f}$ (qui est la fonction nulle) ne peuvent pas tendre vers 1.

Théorème 24.8

Pour tout $\ell \in \mathbb{K}$ **non nul**, on a $f \underset{a}{\sim} \ell \iff \lim\limits_{a} f = \ell$.

Démonstration. Comme $\ell \neq 0$, on a par opérations sur les limites :

$$f \underset{a}{\sim} \ell \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\ell} = 1 \iff \lim_{x\to a} \ell \frac{f(x)}{\ell} = \ell \iff \lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

□

Exemple 6. Trouver un équivalent simple des fonctions suivantes :

- $\arctan x \underset{x\to+\infty}{\sim} \ldots\ldots$
- $3x^2 - 2x + 4 \underset{x\to+\infty}{\sim}$ .... car (si $x \neq 0$)
- $3x^2 - 2x + 4 \underset{x\to 0}{\sim}$ .... car (si $x \neq 0$)
- $3x^2 - 2x \underset{x\to 0}{\sim}$ .... car (si $x \neq 0$)
- $\sin x \underset{x\to 0}{\sim}$ .... car (si $x \neq 0$)

Théorème 24.9 – Équivalents d'un polynôme

On cherche un équivalent à l'expression $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$.

- En $\pm\infty$, $P(x)$ est équivalent à son monôme **non nul** de plus **haut** degré :

$$a_n \neq 0 \implies P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n$$

- En 0, $P(x)$ est équivalent à son monôme **non nul** de plus **bas** degré :

$$\begin{cases} a_0 = \ldots = a_{p-1} = 0 \\ a_p \neq 0 \end{cases} \implies P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$$

Théorème 24.10 – Relation d'équivalence

$\sim$ est une relation d'équivalence sur les fonctions qui ne s'annulent pas sur un voisinage épointé de a. Si f, g, h sont trois telles fonctions, on a :

1. Réflexivité : $f \underset{a}{\sim} f$
2. Symétrie : si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $g \underset{a}{\sim} f$
3. Transitivité : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} h$

Démonstration. Évident par opérations sur les limites. □

1.4 Produit, puissance avec les équivalents

Théorème 24.11 – Produit, quotient et puissance avec les équivalents

1. Multiplication par un scalaire non nul : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$,

$$f \underset{a}{\sim} g \iff \lambda f \underset{a}{\sim} \lambda g$$

2. Produit et quotient : soit f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions vérifiant les mêmes hypothèses que f et g.

$$\begin{cases} f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \\ f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \end{cases} \implies \begin{cases} f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2 \\ \dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2} \end{cases}$$

3. Puissance entière : pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$f \underset{a}{\sim} g \implies f^p \underset{a}{\sim} g^p$$

4. Puissance réelle : si f, g sont strictement positives sur un voisinage épointé de a, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f \underset{a}{\sim} g \implies f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$$

Démonstration. En revenant à la définition d'un équivalent et par opérations sur les limites. Par exemple pour le produit :

$$\begin{cases} f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \\ f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lim\limits_a \dfrac{f_1}{g_1} = 1 \\ \lim\limits_a \dfrac{f_2}{g_2} \to 1 \end{cases} \implies \lim_a \left(\frac{f_1}{g_1} \times \frac{f_2}{g_2} \right) = 1 \implies f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$$

Pour la puissance réelle...

□

Méthode

- Pour trouver un équivalent simple d'un produit / quotient, il suffit de trouver un équivalent simple de chaque terme du produit / quotient.
- Pour trouver un équivalent simple d'une expression mise à une puissance $\alpha \in \mathbb{R}$, il suffit de déterminer un équivalent simple de l'expression puis de passer à la puissance α.

Exemple 7. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}(2x^4 + x)}{(3x + \sin x)^3}$.

1.5 Somme et équivalents

ATTENTION : ***NE JAMAIS ADDITIONNER DES ÉQUIVALENTS*** (ou les soustraire) :

$$\begin{cases} f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \\ f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \end{cases} \quad \boxed{\not\Longrightarrow} \quad f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$$

Exemple 8. Contre-exemple :

Le fait que l'équivalent ne se comporte pas bien avec la somme est naturel : cette notion a été définie avec une limite d'un quotient (ou encore d'un produit de f et de $\frac{1}{g}$). Les opérations produit, quotient et puissances se "comportent bien" avec le produit, mais pas la somme. On dispose toutefois du résultat suivant :

Théorème 24.12 – Ajouter / Retirer un terme dans un équivalent

Si $f+g$ ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a, alors

$$f \underset{a}{=} o(g) \quad \Longleftrightarrow \quad f+g \underset{a}{\sim} g$$

De manière équivalente, pour toutes fonctions h et g telles que $h-g$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang, on a :

$$h \underset{a}{\sim} g \quad \Longleftrightarrow \quad h-g \underset{a}{=} o(g)$$

On passe d'une forme à l'autre en posant $h = f+g$.

Démonstration. Il suffit de montrer la seconde équivalence :

$$f \underset{a}{\sim} g \iff \lim_a \left(\frac{f}{g}-1\right) = 0 \iff \lim_a \frac{f-g}{g} = 0 \iff f-g \underset{a}{=} o(g)$$

□

Méthode – Équivalent d'une somme

Étant donné deux fonctions f, g, pour trouver un équivalent de $f+g$ en a, la première chose à tenter est de vérifier si l'une des fonctions est négligeable devant l'autre. Si par exemple $f \underset{a}{=} o(g)$, alors $f+g \underset{a}{\sim} g$.

Exemple 9. Déterminer un équivalent simple en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2 + x}{x(-e^x+x)^3}$.

1.6 Les équivalents à connaitre

Théorème 24.13

On suppose que a est fini. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x-a)$.

Démonstration. Pour tout $x \neq a$, comme f est dérivable en a, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} f'(a)$$

Ainsi, par quotient,

$$\frac{1}{f'(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} 1$$

d'où $f(x) - f(a) \underset{x \to +\infty}{\sim} f'(a)(x-a)$. □

Corollaire 24.14 – Équivalents en 0 à connaitre

Démonstration. Les formules des quatre premières lignes découlent directement du Théorème 24.13.
Pour la dernière ligne, on ne peut pas l'appliquer car $\cos'(0) = 0$ et $\text{ch}'(0) = 0$, ce qui donnerait 0 à droite de l'équivalent (et donc c'est interdit !).

□

Exemple 10. Déterminer la limite en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\ln(1+x)}$.

1.7 Autres propriétés des équivalents

Théorème 24.15 – Conservation du signe et des limites par les équivalents

On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$.

- Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.
- On suppose $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Si $g>0$ au voisinage de a, alors $f>0$ au voisinage de a.
- On suppose $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Si $g<0$ au voisinage de a, alors $f<0$ au voisinage de a.

Théorème 24.16 – Théorème d'encadrement

On suppose $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Soit $h : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $f \leq g \leq h$ au voisinage de a.
Si $f \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} g \underset{a}{\sim} h$.

1.8 Composition avec les petit-o, grand-O et équivalents

Méthode

Dans cette section uniquement, on notera b un point de I ou une extrémité de I, tandis que a est un point quelconque de $\overline{\mathbb{R}}$.

En dehors des sommes, produits, quotients et puissances, il faut être extrêment vigilant avec la composition par une fonction :
NE JAMAIS COMPOSER A GAUCHE DANS LES ÉQUIVALENTS, LES GRAND-O ET PETIT-o !

$$f \sim g \quad \not\Longrightarrow \quad h\circ f \sim h \circ g$$

$$f = \underset{a}{o}(g) \quad \not\Longrightarrow \quad h\circ f = \underset{a}{o}(h\circ g) \qquad \text{(idem avec } O\text{)}$$

Voici quelques contre-exemples :

$$x \underset{x\to+\infty}{\sim} x+1 \qquad \text{mais} \qquad e^x \underset{x\to+\infty}{\not\sim} e^{x+1} \qquad \text{car} \qquad \frac{e^x}{e^{x+1}} = \frac{1}{e} \underset{x\to+\infty}{\not\longrightarrow} 1$$

$$x^3 = \underset{x\to 0}{o}(x^2) \qquad \text{mais} \qquad \ln x^3 \neq \underset{x\to 0}{o}(\ln x^2) \qquad \text{car} \qquad \frac{\ln x^3}{\ln x^2} = \frac{3\ln x}{2\ln x} = \frac{3}{2} \underset{x\to 0}{\not\longrightarrow} 0$$

Cependant, on peut toujours composer à gauche dans un calcul de *limites* :

$$\begin{cases} h(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \\ f(X) \xrightarrow[X\to b]{} \ell' \end{cases} \implies f(h(x)) \xrightarrow[x\to a]{} \ell'$$

Avec les petit-o, les grand-O et les équivalents, bien qu'on ne puisse pas composer à gauche (ce qu'on a pourtant très envie de faire !), on peut composer *à droite* (ce qui est moins naturel).

Théorème 24.17 – Composition à droite et relations de comparaison

Soit $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit h une fonction définie au voisinage de a, à valeurs dans I.

$$\begin{cases} h(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \\ f(X) \underset{X\to b}{\sim} g(X) \end{cases} \implies (f\circ h)(x) \underset{x\to a}{\sim} (g\circ h)(x)$$

La même propriété est valable en remplaçant chaque équivalent par un petit-o :

$$\begin{cases} h(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \\ f(X) = \underset{X\to b}{o}(g(X)) \end{cases} \implies (f\circ h)(x) = \underset{x\to a}{o}((g\circ h)(x))$$

Idem en remplaçant chaque petit-o par un grand-O.

Démonstration. Faisons la preuve pour les équivalents. On peut reformuler l'hypothèse par :

$$\begin{cases} h(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \\ \dfrac{f}{g}(X) \xrightarrow[X\to b]{} 1 \end{cases}$$

Par composition *de limites*, on a :

$$\frac{f}{g}(h(x)) = \frac{(f\circ h)(x)}{(g\circ h)(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$$

La preuve avec les O est plus technique mais moins importante. □

Méthode – Équivalent et composée à droite

Lorsqu'on cherche un équivalent en $\boxed{a}$ d'une expression composée $(f\circ h)(x)$, il y a deux possibilités :

- Ou bien $(f\circ h)(x)$ admet une limite ℓ *finie non nulle* en a, et dans ce cas $(f\circ h)(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$.
- Ou bien $(f\circ h)(x)$ admet une limite infinie ou nulle :
  - On cherche un équivalent connu pour f en un point b : $f(X) \underset{X\to b}{\sim} \ldots$ (souvent $b=0$ par le Corollaire 24.14).
  - Si $h(x) \xrightarrow[x\to \boxed{a}]{} b$, alors on peut poser appliquer la composition à droite avec $X = h(x)$. Sinon, il faut faire des réécritures pour construire une expression X telle que $X \xrightarrow[x\to \boxed{a}]{} 0$ et appliquer cette composition.

La méthode fonctionne de manière analogue avec des petit-o et des grand-O mais cela est moins utile en pratique. L'exemple suivant est volontairement très détaillé pour expliquer la méthode.

Exemple 11. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)$.

2 Relations de comparaison pour les suites

2.1 Définitions et exemples

Les relations de comparaison vues pour les fonctions peuvent être adaptées aux suites. Pour les fonctions, on les définit sur un voisinage épointé d'un point a (fini ou infini). Pour les suites, qui sont définies sur $\mathbb{N}$, toutes les relations sont définies en $+\infty$. L'hypothèse "g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a" devient alors "(v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang".

Hypothèse

Dans toute cette section, on suppose que (u_n) et (v_n) sont des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Toute suite se trouvant dans un petit-o, dans un grand-O ou d'un côté ou de l'autre d'un équivalent sera supposée non nulle à partir d'un certain rang.

Définition 24.18

1. On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n = O(v_n)$.
2. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si $\dfrac{u_n}{v_n} \to 0$. On note alors $u_n = o(v_n)$.
3. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.

À nouveau, on s'autorise à écrire abusivement que le terme général u_n est dominé / négligeable / équivalent au terme général v_n. Enfin, si u_n est négligeable devant v_n, on peut aussi dire "v_n est prépondérante devant u_n".

Théorème 24.19

Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = O(v_n)$. La réciproque est fausse.

Exemple 12.

1. $n^2 + n = O(n^2)$ car $\left(\dfrac{n^2+n}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ est une suite bornée (elle converge vers 1).
2. Les croissances comparées peuvent se réécrire avec un petit-o : pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$:
$$(\ln n)^\alpha = o(n^\beta) \qquad n^\alpha = o(e^{\beta n}) \qquad e^{\alpha n} = o(n!)$$
3. Pour tous réels α, β, $\quad \alpha < \beta \implies n^\alpha = o(n^\beta)$
4. (u_n) est une suite bornée si et seulement si $u_n = O(1)$.
5. (u_n) tend vers 0 si et seulement si $u_n = o(1)$.

Remarque. On ne doit **jamais** écrire "0" d'un côté ou de l'autre d'un équivalent : $\cancel{u_n \sim 0}$ et $\cancel{0 \sim u_n}$. En effet ceci sera toujours faux car les suites "$\dfrac{u_n}{0}$" ou $\dfrac{0}{u_n}$ ne peuvent pas tendre vers 1.

Théorème 24.20

Pour tout $\ell \in \mathbb{K}$ **non nul**, on a $u_n \sim \ell \iff u_n \to \ell$.

Exemple 13.

1. $e^{\frac{1}{n}} \sim$...
2. $\dfrac{1}{n+1} \sim$.......
3. Pour tous $a_0, \cdots, a_r \in \mathbb{K}$ avec $a_r \neq 0$, on a
$$a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \ldots + a_1 n + a_0 \quad \sim \quad a_r n^r$$

2.2 Signification asymptotique de o, O et $\sim$ pour des suites

Lemme 24.21

Une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée à partir d'un certain rang.

Démonstration.

□

Théorème 24.22

Soit (u'_n) et (v'_n) deux suites obtenues en changeant un nombre fini de termes de (u_n) et (v_n) respectivement. Alors $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u'_n \sim v'_n$. Idem avec en remplaçant "$\sim$" par " $= o(\dots)$" ou par "$= O(\dots)$".

Remarque. Malgré le signe égal, les relations $u_n = O(v_n)$ et $u_n = o(v_n)$ ne traduisent une propriété vérifiée par les suites (u_n) et (v_n) qu'au "voisinage de $+\infty$". Ces relations ne donnent donc aucune information sur les premiers termes de ces suites, ou encore les 10^{10} premiers termes.

2.3 Propriétés des relations de comparaison (suites)

La plupart des propriétés vues pour les fonctions s'adaptent aux suites. Plutôt que de tout réécrire, on donne les propriétés conservées avec quelques exemples. Lorsqu'une suite apparait dans un O, dans un o, ou d'un côté d'un $\sim$, on suppose qu'elle est non nulle à partir d'un certain rang.

- Les O et o sont transitifs (Théorème 24.5). Par exemple :
  - si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$.
- On peut faire des combinaisons linéaires, des produits, etc. avec des O et des o (Théorème 24.6). Par exemple :
  - si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$
- La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites non nulles à partir d'un certain rang.
- On peut faire le produit, le quotient, mettre à la puissance entière (ou réelle sous réserve de sens) un équivalent avec des suites (Théorème 24.11). Par exemple :
  - Si $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$, alors $a_n u_n \sim b_n v_n$ et $\dfrac{a_n}{u_n} \sim \dfrac{b_n}{v_n}$.
  - Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^2 \sim v_n^2$.
  - Si $u_n \sim v_n$ et que (u_n) et (v_n) sont strictement positives à partir d'un certain rang, alors $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$.
- On ne peut pas ajouter ou soustraire des équivalents. Mais on peut enlever un terme négligeable par rapport à l'autre (Théorème 24.12).
  - $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $u_n + v_n \sim v_n$.
  - $a_n \sim b_n$ si et seulement si $a_n - b_n = o(b_n)$.
- On conserve la limite et le signe dans un équivalent (Théorème 24.15).
- On dispose d'un théorème d'encadrement (Théorème 24.16).
  - Avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et que $u_n \sim w_n$, alors (v_n) est équivalente à u_n et w_n.

La composition à droite pourrait être adaptée, mais ce n'est guère utile. Par contre, on peut partir d'un équivalent de fonctions et composer à droite par une suite :

Théorème 24.23

On suppose que f, g ne s'annulent pas sur un voisinage épointé de a. On a

$$\begin{cases} \lim u_n = a \\ f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) \sim g(u_n)$$

La méthode est similaire à celle des fonctions, cf exemples ci-dessous.

Exemple 14. Déterminer un équivalent de $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Exemple 15. Déterminer un équivalent de $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

3 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour déterminer un équivalent simple d'une expression, on peut :

1. Tout d'abord, essayer des réécritures pour faire apparaitre des produits, quotients, puissances.
2. Chercher séparément un équivalent de chaque terme d'un produit / quotient / expression à l'intérieur d'une puissance, puis tout recombiner à la fin.
3. Si l'expression fait apparaitre une somme, chercher si un des termes est négligeable devant l'autre.
4. Si une expression admet une limite finie non nulle, elle est équivalente à cette limite.
5. Si une expression s'écrit comme une composée, on peut :
   - Identifier un équivalent connu pour une fonction $\left(f(X) \underset{X\to b}{\sim} \dots\right)$ puis se ramener, éventuellement par des réécritures, à ce cadre en posant pour X une expression qui tend vers b (quand x tend vers a ou n tend vers $+\infty$).
   - (vu au prochain chapitre) Écrire un DL sous forme normalisée et en déduire un équivalent.

En règle générale, les sommes et les compositions sont les plus délicates à éliminer.