Chapitre 21

Polynômes (partie A)

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On peut définir un polynôme en fonction d'un réel x, mais ce même polynôme peut aussi s'appliquer à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, ou encore à un endomorphisme de groupes $f : G \to G$. Ainsi, c'est bien le même polynôme qu'on applique à ces trois objets :

$$P(x) = x^3 + 2x - 4$$

$$P(A) = A^3 + 2A - 4I_n$$

$$P(f) = f^3 + 2f - 4\mathrm{id}_E \qquad \text{avec } f^3 = f \circ f \circ f$$

On souhaite étudier le polynôme P indépendamment des objets en lequel on l'applique. Cela conduit à définir un polynôme selon une variable X qui sera appelée une indéterminée : on ne précisera pas l'ensemble auquel X appartient (en pratique X sera un élément d'une “algèbre”). Le polynôme ci-dessus s'écrira donc :

$$P(X) = X^3 + 2X - 4$$

Plus généralement, un tel polynôme peut s'appliquer à tout élément a d'un anneau $(A, +, \times)$:

$$P(a) = a^3 + 2a - 4\,1_A$$

1 Opérations sur les polynômes

1.1 Définition

Définition 21.1 – Définition intuitive d'un polynôme

À tout entier $n \in \mathbb{N}$ et à tout $(n+1)$-uplet $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, on associe un objet P appelé polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. On le notera :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad = \quad a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

$a_0, a_1, \cdots, a_n$ sont appelés les coefficients de P. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, a_k est appelé coefficient d'ordre k de P.
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

L'écriture $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ est appelée l'écriture développée de P. On dispose de la règle de calcul suivante : si $a_k = 0$, alors $a_k X^k = 0X^k = 0$. On peut alors omettre d'écrire ce terme dans l'écriture de P.

Exemple 1.

- $P = -X^3 + 2X$ est un polynôme car $P = \underbrace{(-1)}_{a_3} X^3 + \underbrace{0}_{a_2} X^2 + \underbrace{2}_{a_1} X + \underbrace{0}_{a_0} = -X^3 + 2X$
- Sur le même principe, $2X^7$ et 4 sont des polynômes.
- 0 est également un polynôme : c'est le polynôme nul.
- $X^{1/2}$ et $1 + X + X^2 + \ldots$ ne sont pas des polynômes.

À ce stade, l'écriture développée n'est qu'une notation. Bien qu'elle fasse apparaitre des sommes, des produits et des puissances, on ne donnera un sens à toutes ces opérations que plus loin. La règle $0X^k = 0$ est toutefois logique : par exemple, lorsqu'on évalue le polynôme $P = X^{k+1} + 0X^k$ en un élément a d'un anneau $(A, +, \times)$, on obtient :

$$P(a) = a^{k+1} + 0a^k = a^{k+1} + 0_A = a^{k+1}$$

Ainsi, il est naturel de considérer que $P = X^{k+1}$.

Remarque. À cause de la règle $0X^k = 0$, on peut toujours rajouter des coefficients nuls supplémentaires à un polynôme sans le modifier. Par exemple, avec $P = X + 3$, on a :

$$P = \sum_{k=0}^{1} a_k X^k \qquad \text{avec } a_0 = 3 \text{ et } a_1 = 1$$

$$P = \sum_{k=0}^{2} a_k X^k \qquad \text{avec } a_0 = 3 \text{ et } a_1 = 1 \text{ et } a_2 = 0$$

$$P = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k \qquad \text{avec } a_0 = 3 \text{ et } a_1 = 1 \text{ et } a_2 = a_3 = 0$$

etc. Et de ce fait, un même polynôme P admet plusieurs écritures développées. C'est pourquoi on dispose d'une autre façon de définir un polynôme, plus précise mais plus abstraite :

Définition 21.2 – Définition formelle d'un polynôme

À toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *nulle à partir d'un certain rang*, on associe un objet P appelé polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, noté :

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \quad = \quad a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots$$

Comme la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq n+1$, on a $a_k = 0$. Cela entraine que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et on retrouve la définition 21.1 : bien que la somme soit infinie, il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls.

Théorème 21.3 – Identification

Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que P et Q sont égaux et on note $P = Q$ si les coefficients de P et Q sont deux à deux égaux, i.e. si $\quad \forall k \in \mathbb{N} \quad a_k = b_k$.

La propriété d'identification avec des sommes infinies est utile dans les démonstrations théoriques. Par contre, dans la version pratique, on aura $\quad P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad$ et $\quad Q = \sum_{k=0}^{n'} b_k X^k \quad$ avec (quitte à échanger P et Q) $n \leq n'$. Dans ce cas :

$$P = Q \iff \begin{cases} \forall k \in [\![0,n]\!] & a_k = b_k \\ \forall k \in [\![n+1,n']\!] & b_k = 0 \end{cases}$$

En particulier, si $n = n'$, il suffit de vérifier que $\forall k \in [\![0,n]\!] \quad a_k = b_k$.

1.2 Degré d'un polynôme

Définition 21.4 – Degré

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On définit son degré, noté $\deg P$ ou $\deg(P)$, comme étant la valeur suivante :

- Si $P \neq 0$, $\deg P$ est le plus grand entier $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $a_k \neq 0$.
- Si $P = 0$, on pose par convention $\deg(0) = -\infty$.

En particulier, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $\deg P \leq n$.

Exemple 2. Le degré de $P = a_1 X + a_0$ est ......

Exemple 3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P \neq 0$ si et seulement si $\deg P$.............

Exemple 4. $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit constant si $P = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{K}$, càd si $\deg P$........... . Plus précisément :

- $a_0 = 0$ ssi P est nul ssi $\deg P$............
- $a_0 \neq 0$ ssi P est constant *non nul* ssi $\deg P$............

Définition 21.5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $\boxed{\text{au plus}}$ n :

$$\mathbb{K}_n[X] := \left\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\right\}$$

En particulier $\mathbb{K}_0[X]$ est l'ensemble des polynômes constants. En pratique, on identifie $\mathbb{K}_0[X]$ à $\mathbb{K}$. Ainsi, un élément $a \in \mathbb{K}$ peut être considéré comme le polynôme constant égal à a.

1.3 Écriture normalisée et vocabulaire

La dénomination d'écriture normalisée n'est pas officielle. Mais c'est bien pratique pour fixer les idées.

Théorème 21.6 – Non officiel : écriture “normalisée”

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $n \in \mathbb{N}$. Alors $\deg P = n$ si et seulement s'il existe $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad \boxed{\text{avec } a_n \neq 0}$$

Il s'agit de l'écriture normalisée de P. Cette écriture est unique pour tout polynôme non nul.

Le principal intérêt de l'écriture normalisée est de donner directement le degré. Le polynôme nul n'admet pas d'écriture normalisée.

Exemple 5. Soit $P = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ avec $a_2 \neq 0$. Alors $\deg P = 2$. En revanche si $a_2 = 0$, on aurait $\deg P$...........

On a vu deux écritures différentes d'un polynôme : développée et normalisée. Selon l'écriture retenue, on n'a pas la même information sur le degré :

Théorème 21.7 – Lien entre écriture et degré

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Avec l'écriture développée :

- Avec l'écriture normalisée :

L'écriture développée de P donne une information sur la valeur *maximale* du degré de P. L'écriture normalisée de P donne la valeur précise du degré de P.

Vocabulaire lié au degré. Soit P un polynôme non nul qui a une écriture normalisée $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

1. a_n est appelé le <u>coefficient dominant (ou de plus haut degré)</u> de P.
2. $a_n X^n$ est appelé <u>terme dominant (ou de plus haut degré)</u> de P.
3. P est dit <u>unitaire</u> si $a_n = 1$, i.e. si P est de la forme $\quad X^n + a_{n-1}X^n + \ldots a_1 X + a_0$
4. P est dit un <u>monôme</u> si $a_{n-1} = \ldots = a_0 = 0$, i.e. si P est de la forme $\quad a_n X^n \quad$ (avec $a_n \neq 0$)

Théorème 21.8 – Identification

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. $P = Q$ si et seulement si $\deg P = \deg Q$ et leurs coefficients de même degré sont égaux deux à deux.

1.4 Somme de polynômes et multiplication par une constante

Définition 21.9 – Opérations $+$ et $\lambda \cdot$

Soit deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$: $\quad P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \qquad Q = \sum_{k=0}^{N} b_k X^k$

On définit sur $\mathbb{K}[X]$ la l.c.i. $+$ et la loi de multiplication par une constante $\lambda \in \mathbb{K}$ par :

$$P + Q := \sum_{k=0}^{N} (a_k + b_k) X^k \qquad \lambda P := \sum_{k=0}^{N} (\lambda a_k) X^k$$

$P + Q$ et λP sont bien des polynômes : en effet pour tout k, $a_k + b_k$ et λa_k sont bien des éléments du corps $\mathbb{K}$.

Ces définitions sont cohérentes avec la linéarité de la somme :

$$\lambda P+\mu Q \quad = \quad \lambda \sum_{k=0}^{N} a_k X^k+\mu \sum_{k=0}^{N} b_k X^k \quad = \quad \sum_{k=0}^{N}(\lambda a_k+\mu b_k) X^k$$

Théorème 21.10

L'ensemble $(\mathbb{K}[X],+)$ est un groupe abélien. Son élément neutre est le polynôme nul. Le symétrique d'un polynôme P pour la loi $+$ est le polynôme $-P$.

Théorème 21.11 – Degré de λP

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\deg(\lambda P)=\begin{cases}\deg P & \text{si } \lambda \in \mathbb{K}^* \\ -\infty & \text{si } \lambda=0\end{cases}$$

Démonstration. Si $\lambda=0$ ou $P=0$, le polynôme λP n'a que des coefficients nuls : c'est le polynôme nul et donc son degré est $-\infty$. On a bien $\deg(\lambda P)=-\infty$.

□

Théorème 21.12 – Degré de $P+Q$

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a :

Attention, si $\deg P=\deg Q$, il peut arriver que $\deg(P+Q)<\max(\deg P, \deg Q)$. Par exemple, si $P \neq 0$ et $Q=-P$, alors $\deg(P+(-P))=$ .... tandis que

$$\max(\deg P, \deg(-P))=\max(\deg P, \deg P)=\deg P \neq-\infty$$

Démonstration.

- Si $Q=0$, on a $\deg(P+0)=\deg P$ et $\max(\deg P, \deg 0)=\max(\deg P,-\infty)=\deg P$, donc les deux formules sont vraies. Idem si $P=0$.

$\square$

Corollaire 21.13

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, alors $\quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \qquad \lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

En particulier, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$.

1.5 Produit de polynômes

Le produit de deux polynômes est calqué sur le produit tel qu'on le calcule dans les réels. En introduction, on considère donc deux fonctions polynômiales $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_i x^i$$

avec $m, n \in \mathbb{N}$. Le produit fg est aussi une fonction polynômiale :

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m\right)\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n\right) \\ &= a_0 b_0 \ + \ (\qquad\qquad\qquad\qquad)\, x \ + \ (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\, x^2 \ + \ \ldots \ + \ (\qquad\qquad)\, x^{m+n}\end{aligned}$$

Plus généralement, on montre que

$$(fg)(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k \qquad \text{avec } c_k = \sum_{\substack{0 \le i \le m \\ 0 \le j \le n \\ i+j=k}} a_i b_j \quad = \quad a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

Sur le même principe, pour tous réels $u_0, \cdots, u_m, v_0, \cdots, v_n$, on peut vérifier que :

$$\left(\sum_{i=0}^{m} u_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} v_j\right) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} u_i v_j = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k} u_i v_j\right)$$

(on sous-entend dans la dernière somme que $0 \le i \le m$ et $0 \le j \le n$).

Définition 21.14 – Multiplication de polynômes

Soit $P=\sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ et $Q=\sum_{j=0}^{n} b_j X^j$ deux polynômes. On définit le polynôme produit :

Théorème 21.15 – Degré de PQ

Soit $P,Q\in\mathbb{K}[X]$. On a $\quad \deg(PQ)=\deg P+\deg Q$.

Cette formule sous-entend la convention $n+(-\infty)=-\infty$ pour tout $n\in\mathbb{N}\cup\{-\infty\}$.

$\square$

La preuve ci-dessus montre en particulier $P\neq 0$ et $Q\neq 0$, le coefficient dominant de PQ est le produit des coefficients dominants de P et Q. En particulier le produit de polynômes unitaires est un polynôme unitaire.

Théorème 21.16

$(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau intègre. Son élément unité est le polynôme constant $1\in\mathbb{K}_0[X]$.

Démonstration. On vérifie facilement que $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau non trivial et commutatif. La seule propriété à vérifier est qu'il n'y a pas de diviseur de zéro dans $\mathbb{K}[X]$.

$\square$

Corollaire 21.17

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Si $PQ = 0$, alors $P = 0$ ou $Q = 0$.
Tout polynôme non nul est régulier :

$$\forall A \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \qquad AP = AQ \quad \Longrightarrow \quad P = Q$$

Théorème 21.18 – Éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. P est inversible si et seulement si P est constant non nul, i.e. $P = a_0 \in \mathbb{K}^*$. Dans ce cas, l'inverse de P est le polynôme $\dfrac{1}{a_0}$.

Démonstration. Sens indirect : si $P = a_0 \in \mathbb{K}^*$, alors en posant le polynôme constant $Q = \dfrac{1}{a_0}$, on a bien $PQ = 1$, donc P est inversible.

□

Attention, on ne peut donc écrire P^{-1} que si P est constant non nul. Et en pratique, il n'y a pas de raison de l'écrire...

Remarque. Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\quad \lambda(PQ) = P(\lambda Q) = (\lambda P)Q$
On pourra donc écrire λPQ sans ambiguité

1.6 Puissances d'un polynôme

Définition 21.19

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit le polynôme

$$P^n = \underbrace{P \times \cdots \times P}_{n \text{ fois}}$$

avec la convention $P^0 = 1$.

Théorème 21.20 – Degré de P^n

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\deg(P^n) = n \deg P$$

La formule reste vraie si $n = 0$ avec la convention $0 \times (-\infty) = 0$, mais cela n'est guère utile à retenir en pratique.

Théorème 21.21 – Calcul dans un anneau

Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Q^k P^{n-k}$$

$$P^n - Q^n = (P-Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$$

Exemple 6. Soit un entier $n \geq 1$ et $P = (X+1)^n - X^n - nX^{n-1}$. Déterminer le degré et (s'il existe) le coefficient dominant de P.

1.7 Évaluation en un point

Définition 21.22

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $z \in \mathbb{K}$. On appelle évaluation de P en z la valeur $P(z)$ dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

On prendra garde au fait que si $P = a_0$, i.e. P est constant, alors $P(z) = a_0$. Bien que $P = a_0$, on écrira toujours $P(z)$ et non "$a_0(z)$" à cause d'une confusion évidente et dangereuse avec le produit entre $a_0 \in \mathbb{K}$ et $z \in \mathbb{K}$.

Avec des notations évidentes, on a de plus

$$(P+Q)(z)=P(z)+Q(z)$$

$$(\lambda P)(z)=\lambda P(z)$$

$$(PQ)(z)=P(z)Q(z)$$

Théorème 21.23

Soit $z\in\mathbb{K}$. L'application

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_z : \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{K} \\ P &\mapsto P(z) \end{aligned}$$

est un morphisme d'anneaux.

Exemple 7. Si $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $P(0)=$.............. et $P(1)=$..............

1.8 Composition de polynômes

Notation. Jusqu'à présent, on a toujours noté un polynôme avec uniquement la lettre P, mais on peut aussi l'écrire avec $P(X)$. On peut donc écrire $P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Cette notation permet de définir par exemple :

$$P(X^2)=\sum_{k=0}^{n} a_k (X^2)^k \qquad P(X+1)=\sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k$$

Plus généralement, on a la définition suivante :

Définition 21.24

Soit $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q=\sum_{j=0}^{m} b_j X^j$ deux polynômes. On définit le <u>polynôme composée</u> $P\circ Q$ par :

$$P\circ Q=P(Q(X))=\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k=\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\sum_{j=0}^{m} b_j X^j\right)^k$$

Exemple 8. Soit $P=X^2-X$, $\quad Q=2X+1\quad$ et $\quad R=3$. Calculer :

$P\circ Q=$.. $\qquad P\circ R=$..

$Q\circ P=$.. $\qquad R\circ P=$..

$P(X^2)$ correspond donc en fait au polynôme $P\circ Q$ avec $Q=X^2$. Toutefois cette notation est à manier avec précaution, car on peut confondre $P(X^2)$ avec le produit $P\times X^2$. Dans la pratique on utilisera principalement la notation $P(Q(X))$ pour la composée lorsque $Q(X)=X\pm\alpha$. On notera cependant que :

- Si $Q=\lambda\in\mathbb{K}$, alors $P\circ Q$ est constant et égal à $P(\lambda)$: la notation $P(Q)$ est cohérente avec l'évaluation en λ.

- Si $Q = X$, alors $P \circ Q$ est égal au polynôme P : la notation $P(Q)$ est cohérente avec le fait qu'on peut noter $P(X)$ le polynôme P.

Théorème 21.25 – Degré de $P \circ Q$

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

1. Si Q est non constant, alors $\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$.
2. Si Q est constant, alors $P \circ Q$ est constant et donc $\deg(P \circ Q) \leq 0$.

2 Fonction polynômiale

Définition 21.26 – Fonction polynômiale

Soit $X \subset \mathbb{K}$ et $f : X \to \mathbb{K}$. On dit que f est une fonction polynômiale s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\forall x \in X \qquad f(x) = P(x)$$

Définition 21.27

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit la fonction polynômiale associée à P comme étant la fonction $f_P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par

$$f_P : x \mapsto P(x)$$

Cette notation n'est pas officielle. En général, on note plutôt $\widetilde{P}$ la fonction f_P.

Au lycée, on dit par exemple que la fonction $x \mapsto x^2 + 2x$ est un polynôme, mais le terme correct est en fait fonction polynômiale.

La notation $P(x)$ laisse parfois penser (à tort) que P est une fonction, mais c'est bien un polynôme. Sur le principe ce n'est pas le même objet qu'une fonction : P appartient à $\mathbb{K}[X]$ et non $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$. On verra cependant que l'application $P \mapsto f_P$ est bijective de $\mathbb{K}[X]$ sur l'ensemble des fonctions polynomiales (la surjectivité découle de la définition).

Les opérations $+$, $\lambda \cdot$, $\times$ et $\circ$ pour les polynômes sont "compatibles" avec les opérations $+$, $\lambda \cdot$, $\times$ et $\circ$ entre fonctions. Cela signifie que pour tous polynômes P, Q et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

- $f_{P+Q} = f_P + f_Q$
- $f_{\lambda P} = \lambda f_P$
- $f_{PQ} = f_P f_Q$
- $f_{P \circ Q} = f_P \circ f_Q$

En particulier, l'application $P \mapsto f_P$ est un morphisme d'anneaux de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$.

3 Dérivation formelle dans $\mathbb{K}[X]$

3.1 Définitions et premières propriétés

Soit $k \in \mathbb{N}$. Si f est la fonction définie par $f(x) = x^k$, alors

$$f'(x) = \begin{cases} kx^{k-1} & \text{si } k \geq 1 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Sur le même principe, on pose

$$(X^k)' = \begin{cases} kX^{k-1} & \text{si } k \geq 1 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Définition 21.28

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Le <u>polynôme dérivé</u> de P est le polynôme

Sur le principe, la dérivation est en tout point similaire à celle que l'on fait dans les réels :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)' \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \left(X^k\right)' \quad = \quad 0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \left(X^k\right)' \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

Attention, on ne peut pas écrire "X^{-1}", donc en particulier on ne peut écrire $(X^k)' = kX^{k-1}$ que lorsque $k \geq 1$. C'est pourquoi la première somme de la définition commence à l'indice 1.

Exemple 9. On a $(-5X^3 + 4X^2 - 7)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
Attention, la notation de cet exemple n'est valide que si on a un polynôme entre les parenthèses. Si f est la fonction définie par $f(x) = -5x^3 + 4x^2 - 7$, on ne peut toujours pas écrire $f'(x) = (\cancel{-5x^3 + 4x^2 - 7})'$

Remarque. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la fonction polyomiale f_P est dérivable, et il y a "compatibilité" entre ces notions : $(f_P)' = f_{P'}$. Mais la dérivée formelle reste définie si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors qu'on ne sait pas dériver une fonction définie sur $\mathbb{C}$. Plus exactement, c'est une dérivation qui est purement algébrique (on n'utilise pas la notion de limite). C'est pour cela que l'on parle de dérivée *formelle*.

3.2 Dérivation et opérations de $\mathbb{K}[X]$

Théorème 21.29 – Dérivation et $+, \lambda\cdot, \times, \circ$

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

1. Linéarité : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$.
2. Produit : $(P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q'$.
3. Composition : $(P \circ Q)' = (P' \circ Q) \times Q'$.

Exemple 10. Déterminer la dérivée formelle du polynôme $P = (2X-1)^4$.

Théorème 21.30 – Degré de P'

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Si $\deg P \geqslant 1$, alors $\deg P' = \deg P - 1$.
- $P' = 0$ si et seulement si P est constant (i.e. $\deg P \leq 0$).

Pour la seconde assertion, le sens réciproque est évident. Pour le sens direct, on raisonne par contraposée : il suffit de montrer que si P est non constant, alors $P' \neq 0$. Or, si P est non constant, on a $\deg P \geq 1$, et donc par la première assertion on a $\deg P' \geq 1-1 = 0 \neq -\infty$. Ainsi, $P' \neq 0$. □

3.3 Dérivée k-ième

Définition 21.31

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit récursivement le polynôme dérivé d'ordre k de P, noté $P^{(k)}$ en posant :

- $P^{(0)} = P$
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k+1)} = (P^{(k)})'$

Exemple 11 (Important !)**.** Soit $k, n \in \mathbb{N}$.

$$(X^n)^{(k)} =$$

En particulier $(X^n)^{(n)} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
On peut généraliser les propriétés de la dérivée formelle aux dérivées successives :

Théorème 21.32

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, et $n \in \mathbb{N}$.

- Linéarité : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}$
- Formule de Leibniz : $(P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$

Théorème 21.33 – Degré de $P^{(n)}$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Si $\deg P \geqslant n$, alors $\deg(P^{(n)}) = \deg P - n$.
- $P^{(n)} = 0$ si et seulement si $\deg P \leq n - 1$.

Exemple 12. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer la dérivée k-ième du polynôme $Q(X) = P(X + \alpha)$ en fonction de celle de P.

3.4 Formule de Taylor

Théorème 21.34 – Formule de Taylor

Soit $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de degré au plus n.

Si $\deg P < n$, alors $P^{(k)}(\alpha) = 0$ pour tout $k \geq \deg P + 1$: les termes correspondants de la somme sont alors nuls.

Démonstration. On fait la preuve pour $\alpha = 0$ d'abord, puis pour $\alpha \neq 0$.

- On suppose $\alpha = 0$.

- Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ quelconque. On pose $Q(X) = P(X+\alpha)$. En appliquant la formule montré au point précédent au polynôme Q, on a $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k$. Ainsi,

$$P(X) = Q(X-\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!}(X-\alpha)^k$$

De plus, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, une récurrence immédiate montre que $Q^{(k)}(X) = P^{(k)}(X+\alpha)$ (cf l'exemple 12), donc $Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(\alpha)$. Finalement,

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

□

Remarque. En particulier, si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

Corollaire 21.35

Si deux polynômes P et Q ont la même fonction polynômiale ($f_P = f_Q$), alors $P = Q$. En particulier, l'application $P \mapsto f_P$ est bijective de $\mathbb{K}\left[X\right]$ sur l'ensemble des fonctions polynomiales.

Démonstration. On admettra cette propriété pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $P, Q \in \mathbb{R}\left[X\right]$ tels que $f_P = f_Q$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$P^{(k)}(0) = (f_P)^{(k)}(0) = (f_Q)^{(k)}(0) = Q^{(k)}(0)$$

Ainsi, étant donné $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \deg P$ et $n \geq \deg Q$, on a

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k = Q$$

Ceci prouve que l'application de $\mathbb{R}\left[X\right]$ dans l'ensemble des fonctions polynômiales définie par $P \mapsto f_P$ est injective. Elle est par ailleurs surjective par définition des fonctions polynômiales. Elle est donc bijective. $\square$

4 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour trouver tous les polynômes qui vérifient une équation donnée, il est souvent utile de raisonner sur le degré et/ou sur le coefficient dominant.

Méthode

Quand on dispose d'informations sur toutes les dérivées d'un polynôme P en un point α (i.e. $P(\alpha)$, $P'(\alpha)$, $P''(\alpha)$, etc.), la formule de Taylor peut être d'une aide précieuse.