Chapitre 20

Systèmes linéaires

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $n, p, q, r \in \mathbb{N}^*$ et le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions et notations

Définition 20.1

On appelle système linéaire de n équations à p inconnues un système d'équations de la forme

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p &= b_2 \\ \qquad \vdots & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p &= b_n \end{cases}$$

où $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des familles d'éléments de $\mathbb{K}$ (tous fixés : leur valeur est connue).

- Les valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{K}$ sont les inconnues du système $(\mathcal{S})$.
- Les valeurs a_{ij} sont les coefficients du système $(\mathcal{S})$.
- Les valeurs $b_1, \cdots, b_n$ sont appelés les seconds membres du système $(\mathcal{S})$.
- Si $b_1 = \cdots = b_n = 0$, on dit que $(\mathcal{S})$ est un système homogène ou sans second membre.
- On appelle système homogène associé à $(\mathcal{S})$ le système obtenu en annulant les seconds membres de $(\mathcal{S})$,

càd :

$$(\mathcal{S}_0) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p & = 0 \\ \quad\vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p & = 0 \end{cases}$$

Exemple 1. Le système $(\mathcal{S}) : \begin{cases} 2x+y=1 \\ x+6y=7 \end{cases}$ est linéaire. Son système homogène associé est $(\mathcal{S}_0) : \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+6y=0 \end{cases}$

Exemple 2. Les systèmes suivants sont linéaires :

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} 2x+6y=0 \\ 6x+3y=1 \\ 2x=5 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_2) : \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ y=2 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_3) : \begin{cases} 0=0 \\ (1+2i)x+iz=3 \end{cases}$$

Exemple 3. Les systèmes suivants ne sont PAS linéaires (même si $(\mathcal{S}_6)$ est équivalent à un système linéaire) :

$$(\mathcal{S}_4) : \begin{cases} 2x+5y=4z \\ xy=1 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_5) : \begin{cases} x^2+y^2=0 \\ x+iz=2 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_6) : \begin{cases} x^2=0 \\ y=3 \end{cases}$$

Théorème 20.2

En reprenant les notations de la Définition 20.1, en posant

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Alors $(x_1, \cdots, x_p)$ est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $AX = B$.

L'équation matricielle $AX = B$ est appelée <u>écriture matricielle</u> du système $(\mathcal{S})$. La matrice A est appelée la <u>matrice</u> du système $(\mathcal{S})$.
Par extension, on dira souvent qu'une équation matricielle $AX = B$ est un système linéaire. Il y a autant d'équations que de lignes pour les matrices A et B. Il y a autant d'inconnues que de colonnes dans la matrice A et de lignes dans la matrice X.

Exemple 4. Le système linéaire $\begin{cases} x+3y+4z & = 0 \\ -2x-3y & = 1 \end{cases}$ se réécrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De plus, on peut omettre le vecteur X et réécrire le système $AX = B$ au moyen d'une <u>matrice augmentée</u> $\left(A \middle| B\right)$:

Exemple 5. Le système $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{array}\right)$ correspond au système

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{cases} x+2y+3z=7 \\ 4y+5z=9 \\ 6z=12 \end{cases}$$

Les inconnues ont été notées arbitrairement x, y, z. On aurait pu choisir x_1, x_2, x_3, ou encore u, v, w, etc.

2 Structure de l'ensemble des solutions

Notation. Comme à la partie 1, on note S et S_0 l'ensemble des solutions des systèmes $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_0)$ respectivement.

Remarque. Par la propriété 20.2, pour trouver S, donc les solutions de $(\mathcal{S})$, on peut ou bien le résoudre sous la forme d'un système d'équations, ou bien sous la forme matricielle.
En pratique, on identifie une matrice (colonne) de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ à un p-uplet de $\mathbb{K}^p$. Ainsi on pourra écrire indifféremment :

$$S = \left\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \quad | \quad AX = B\right\} \quad = \quad \left\{ (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p \;\middle|\; \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p & = b_2 \\ \quad \vdots & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p & = b_n \end{cases} \right\}$$

Définition 20.3

Un système linéaire $(\mathcal{S})$ est dit <u>compatible</u> s'il admet au moins une solution, i.e. si $S \neq \varnothing$.
Il est dit <u>incompatible</u> s'il n'admet pas de solution, i.e. si $S = \varnothing$.

Exemple 6. Le système linéaire $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ est incompatible : $S = \varnothing$.

Sous forme matricielle, le système $(\mathcal{S}) : AX = B$ admet pour système homogène associé le système $(\mathcal{S}_0) : AX = 0_{n,1}$. Ainsi :

$$S_0 = \left\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{n,1}\right\}$$

Un système homogène est toujours compatible : en effet $X = 0_{p,1} \in S_0$, si bien que $S_0 \neq \varnothing$.

Théorème 20.4

Si X_{part} est une solution (particulière) de $(\mathcal{S})$, càd $X_{\text{part}} \in S$, alors

$$S = \left\{X_{\text{part}} + Z \mid Z \in S_0\right\} = X_{\text{part}} + S_0$$

Autrement dit $X \in S$ si et seulement si $\quad \exists Z \in S_0 \qquad X = X_{\text{part}} + Z$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{S} &\iff AX = B \\ &\iff AX = AX_{\text{part}} \\ &\iff A(X - X_{\text{part}}) = 0 \\ &\iff X - X_{\text{part}} \in S_0 \\ &\iff \exists Z \in S_0 \quad X - X_{\text{part}} = Z \\ &\iff \exists Z \in S_0 \quad X = X_{\text{part}} + Z \end{aligned}$$

□

Comme pour les équations différentielles linéaires, pour trouver toutes les solutions de $(\mathcal{S})$, on pourrait trouver une solution particulière ainsi que toutes les solutions du système homogène. Toutefois, pour résoudre un système en pratique, on procédera plutôt par équivalences, en résolvant non pas $(\mathcal{S})$ mais un système $(\mathcal{S}')$ plus simple et qui lui est équivalent, cf section suivante.

3 Opération élémentaire et matrice échelonnée

Définition 20.5

Un système linéaire $(\mathcal{S})$ est équivalent à un système linéaire $(\mathcal{S}')$ si les systèmes $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$ ont les mêmes ensembles de solution.

La méthode du pivot de Gauss consiste à effectuer des opérations (dites élémentaires) sur un système $(\mathcal{S})$ afin de se ramener à un système $(\mathcal{S}')$ plus simple qui est équivalent à $(\mathcal{S})$.

Définition 20.6 – Opération élémentaire

Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire dont on note $L_1, \cdots, L_n$ les lignes correspondant à chaque équation. On appelle opération élémentaire une de ces trois opérations sur les lignes de $(\mathcal{S})$:

- Dilatation : on multiplie une ligne L_i par un élément $\mu \in \mathbb{K}^*$: $\boxed{L_i \leftarrow \mu L_i}$.
- Permutation : on échange deux lignes L_i et L_j : $\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$
- Transvection : on ajoute à L_i une autre ligne L_j $(i \neq j)$ multipliée par $\lambda \in \mathbb{K}$: $\boxed{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$

Théorème 20.7

Étant donné un système $(\mathcal{S})$, si un système $(\mathcal{S}')$ est obtenu par des opérations élémentaires sur $(\mathcal{S})$, alors $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$ sont équivalents.

Démonstration. Admis pour le moment, mais le principe est que chaque opération est "réversible" et permet de "revenir en arrière" : l'opération inverse de $L_i \leftarrow \mu L_i$ est $L_i \leftarrow \mu^{-1} L_i$, l'opération inverse de $L_i \leftrightarrow L_j$ est $L_i \leftrightarrow L_j$, et l'opération inverse de $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$. □

Exemple 7. Résoudre $\begin{cases} 3x - 2z = 5 \\ x - y + z = 7 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

Définition 20.8

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A est une matrice échelonnée si pour chaque ligne L_i (avec $i \in [\![1,n]\!]$) :

- Ou bien L_i est une ligne remplie de zéros.
- Ou bien le premier coefficient non nul de L_i se trouve strictement plus à droite que le premier coefficient non nul de L_{i-1} (avec $i \geq 2$)

Dans ce cas, le premier coefficient non nul de chaque ligne est appelé un pivot de la matrice A.

Dit autrement, une matrice A est échelonnée, lorsque **chaque ligne non nulle commence avec davantage de zéros que la ligne précédente.**

Exemple 8. Les matrices suivantes sont échelonnées (les pivots ont été encadrés) :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{i} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{-6} & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \boxed{3} & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 9. Les matrices suivantes sont-elles échelonnées ?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & x & 5 & -1 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } x \in \mathbb{C}$$

4 Algorithme du pivot de Gauss

Étant donné un système linéaire $AX = B$, on considère sa matrice augmentée :

$$\left(A \middle| B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$$

Pour résoudre $AX = B$, l'algorithme du pivot de Gauss consiste à effectuer des opérations élémentaires sur les ***lignes*** de la matrice augmentée (ce qui affecte également les coefficients $b_1, \cdots, b_n$) de façon à se ramener à une matrice échelonnée à gauche de la barre (et modifera B en une matrice B_0) :

$$\left(A \middle| B\right) \underset{\text{op. élém.}}{\rightsquigarrow} \left(A_{\text{ech}} \middle| B_0\right) \qquad \text{avec } A_{\text{ech}} \quad \text{échelonnée}$$

Lorsque la matrice est échelonnée, le système devient beaucoup plus facile à résoudre.

Au cours de l'algorithme, on appelera sous-matrice une partie rectangulaire de la matrice augmentée (donc en incluant B) sur laquelle on applique l'algorithme. Cette sous-matrice verra petit à petit sa taille diminuer.

Méthode – Algorithme du pivot de Gauss

Initialement, on prend comme sous-matrice toute la matrice augmentée (B inclus).

1. Selon la première colonne de la sous-matrice, on applique les étapes 2, 2bis ou 2ter.
2. **Cas $a_{11} \neq 0$: pivot en haut à gauche.** Si $a_{11} \neq 0$: on l'encadre. Ce sera un pivot de la matrice lorsqu'elle sera échelonnée. Puis, par des transvections, on fait apparaitre des 0 sous $\boxed{a_{11}}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & b_n \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & & & & * \\ \vdots & & * & & \vdots \\ 0 & & & & * \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - \dfrac{a_{n1}}{a_{11}} L_1 \end{array}$$

3. **Rétrécissement de la sous-matrice.** On recommence l'algorithme à l'étape 1 en excluant la première colonne et la première ligne, donc avec la sous-matrice $\left(A' \middle| B'\right)$ ci-dessous :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & & & & * \\ \vdots & & * & & \vdots \\ 0 & & & & * \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & A' & & B' \\ 0 & & & & \end{array}\right)$$

2bis. **Cas où toute la première colonne est nulle.** Si toute la première colonne est nulle, on recommence l'algorithme à l'étape 1 en excluant cette colonne nulle, donc avec la sous-matrice $\left(A' \middle| B'\right)$ ci-dessous :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & & * \\ \vdots & * & \vdots \\ 0 & & * \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & & \\ \vdots & A' & B' \\ 0 & & \end{array}\right)$$

2ter. **Cas où $a_{11} = 0$ mais la première colonne n'est pas nulle.** Si $a_{11} = 0$ mais que la première colonne contient un terme non nul, on en choisit un arbitrairement. Par exemple si $a_{k1} \neq 0$ (avec $k \geq 2$), on le met en première ligne avec la permutation $L_k \leftrightarrow L_1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{k1}} & a_{k2} & \cdots & a_{kp} & b_k \\ a_{21} & & & & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & & & & b_n \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \\ (k\text{-ième ligne}) \\ \\ \\ \end{array}$$

Comme $a_{k1} \neq 0$, on est ramené à la situation de l'étape 2 et on reprend l'algorithme à cette étape.

On continue l'algorithme jusqu'à ce que la sous-matrice n'ait plus de colonne à gauche de la barre verticale. On obtient alors une matrice échelonnée à gauche de cette barre :

$$(A \mid B) \underset{\text{op. élém.}}{\rightsquigarrow} (A_{\text{ech}} \mid B_0)$$

avec A_{ech} une matrice échelonnée et B_0 une matrice a priori différente de B.

Une fois la matrice échelonnée, on peut repasser en écriture “système d’équations”. Comme on a réalisé uniquement des opérations élémentaires, le système initial est équivalent au nouveau système et ce dernier est bien plus facile à résoudre.

Exemple 10. Résoudre $\begin{cases} x+\ \ y+2z=3 \\ x+2y+\ \ z=1 \\ 2x+\ \ y+\ \ z=0 \end{cases}$

L’exemple ci-dessus est simple car les cas 1bis et 1ter de l’algorithme n’arrivent jamais. De plus, il y a autant de pivots que d’inconnues, donc on obtient un système “triangulaire” qui conduit à une unique solution. Les exemples suivants seront plus exotiques. Dans un premier temps, on se contentera d’appliquer l’algorithme du pivot, puis dans la section suivante on reprendra ces exemples pour achever leur résolution.

Exemple 11. Résoudre : $\begin{cases} -9z+8t \quad\quad =4 \\ 3x-6y+4t \quad =7 \\ x-2+z \quad\quad\ =1 \end{cases}$

Exemple 12. Déterminer le ou les valeurs du réel m pour lesquelles le système suivant admet au moins une solution puis le résoudre : $\begin{cases} 7x+7y=2m-1 \\ -6x-9y=-2m \\ x-2y=-1 \\ 3x-6y=m \end{cases}$

5 Résolution d'un système après échelonnement

Méthode – Résolution après échelonnement

On dispose d'un système mis sous forme échelonnée : $(A_{\text{ech}} \mid B_0)$.

1. On encadre chaque pivot de A_{ech}. Les variables qui correspondent à ces colonnes sont appelées des variables pivots. Les autres sont appelées des variables libres.
2. On réécrit l'équation matricielle sous la forme d'un système.
3. Les lignes sans pivot sont les lignes remplies de zéros à gauche de la barre : elles donnent des équations dites de "compatibilités". Ces équations sont toujours de la forme "$0 = \beta_i$", où $\beta_i \in \mathbb{K}$ est le coefficient de la ligne correspondante de B_0.
   - Le système sera compatible si et seulement si chacun de ces β_i est nul. Alors, ces équations deviennent $0 = 0$ et peuvent être ignorées.
4. Les lignes avec pivot donnent des équations qu'on résout usuellement "de bas en haut" : chaque variable pivot doit être isolée et exprimée en fonctions des variables libres et/ou des seconds membres.
5. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions correspond aux p-uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$ où les variables pivots vérifient une équation, tandis que les variables libres prennent des valeurs quelconques dans $\mathbb{K}$.

Exemple 13. Voici un exemple typique de système échelonné :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$$

Ici, il y a 3 variables (inconnues), qu'on peut noter par exemple x, y, z. Les variables x et z sont des variables pivots, tandis que y est une variable libre. En repassant en mode système, on obtient :

Exemple 14. Terminer la résolution des systèmes de la section précédente.

6 Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot

Dans cette section, on va considérer une matrice augmentée d'un autre type : il y aura une matrice carrée à gauche comme à droite de la barre verticale.

Méthode – Calcul de l'inverse par le pivot de Gauss

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche à vérifier si A est inversible et, si c'est le cas, à calculer A^{-1}. On construit d'abord une matrice augmentée :

$$(A \mid I_n)$$

Puis, par des opérations élémentaires sur les ***lignes*** on échelonne la matrice A, à gauche de la barre.

- Si dans la matrice échelonnée il y a moins de n pivots, alors A n'est pas inversible : on peut s'arrêter là.
- Si dans la matrice échelonnée il y a n pivots, càd qu'on obtient une matrice augmentée de la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{*} & & * & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \boxed{*} & \end{array}\right)$$

alors A est inversible. On se ramène alors par des opérations élémentaires à

$$(I_n \mid A')$$

et dans ce cas, $A' = A^{-1}$ est la matrice inverse recherchée.

Exemple 15. Vérifier si $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 7 & 0 \\ -3 & 3 & -10 \end{pmatrix}$ est inversible et si c'est le cas, calculer A^{-1}.

Exemple 16. Vérifier si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et si c'est le cas, calculer A^{-1}.

Théorème 20.9 – Inversibilité des matrices diagonales

Soit $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Alors $D \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont tous non nuls. De plus, lorsque c'est le cas :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & & & \mathbf{0} \\ & \alpha_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Heuristique de la preuve. Si les réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont tous non nuls, on vérifie par un calcul direct que la matrice $\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \cdots, \frac{1}{\alpha_n}\right)$ est bien l'inverse de D.

Réciproquement, si un des coefficients $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ est nul, on montrera grâce au déterminant dans un chapitre ultérieur que D n'est pas inversible. $\square$

Théorème 20.10 – Inversibilité de matrices triangulaires

Soit $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, qu'on écrit sous la forme

$$T = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & * \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \beta_n \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{K}$$

Alors $T \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si les réels $\beta_1, \cdots, \beta_n$ sont tous non nuls et dans ce cas, T^{-1} est de la forme

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1^{-1} & & & *' \\ & \beta_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \beta_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Attention : les termes $*'$ dans T^{-1} ne sont pas forcément les mêmes que les termes $*$ dans T. Ce théorème s'adapte aussi aux matrices triangulaires inférieures.

Heuristique de la preuve. Si les réels $\beta_1, \cdots, \beta_n$ sont tous non nuls, alors la matrice T est déjà échelonnée et possède n pivots $\beta_1, \cdots, \beta_n$. Elle est donc inversible. En réalisant l'algorithme pour inverser T, i.e. passer de $(T \mid I_n)$ à $(I_n \mid T^{-1})$ par des opérations élémentaires, on constate que la matrice T^{-1} obtenue doit vérifier la forme ci-dessus.
Réciproquement, si un des coefficients $\beta_1, \cdots, \beta_n$ est nul, on montrera grâce au déterminant dans un chapitre ultérieur que T n'est pas inversible. $\square$

7 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour résoudre un système linéaire, on peut :

- Si le système est de petite taille (2x2 par exemple) rester en écriture “système” et procéder par substitution ou combinaison.
- Si le système est de grande taille, passer en écriture matricielle et appliquer l’algorithme du pivot au préalable.

Méthode

Pour vérifier si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible ou non et calculer A^{-1} (si A est inversible), on peut :

- Partir d’une matrice augmentée $(A \mid I_n)$ et échelonner A par des opérations sur les lignes.
  - Si en échelonnant A on ne trouve pas n pivots, alors A n’est pas inversible.
  - Si en échelonnant A on trouve n pivots, on se ramène à la forme $\left(I_n \mid A'\right)$. Alors A' est la matrice inverse de A.
- Chercher une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$).

On verra d’autres méthodes pour vérifier plus rapidement si une matrice est inversible ou non, mais en général, elles ne permettent pas de calculer A^{-1}.