P

Chapitre 16

Relations binaires

Plan du chapitre

1 **Définitions et exemples** . . . 1
2 **Relation d'équivalence.** . . . 2
  2.1 Définition . . . 2
  2.2 Aparté : union et intersection d'une famille quelconque d'ensembles . . . 3
  2.3 Classes d'équivalence . . . 4
3 **Relation d'ordre** . . . 5
  3.1 Définitions . . . 5
  3.2 Vocabulaire lié à l'ordre, revisité . . . 6
5 **Méthodes pour les exercices.** . . . 8
6 **Exercices (TD 16)** . . . 8

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, E est un ensemble quelconque.

1 Définitions et exemples

Définition 16.1 – Définition "intuitive"

Une relation (binaire) sur E est la donnée d'une assertion $P(x,y)$ qui dépend de deux éléments $x,y \in E$ quelconques. Si on note cette relation $\mathcal{R}$, on écrira pour la définir :

$$x\mathcal{R}y \iff P(x,y)$$

La valeur de vérité de l'assertion $P(x,y)$ dépend bien sûr de x et de y. Le symbole $\mathcal{R}$ est souvent remplacé par d'autres : $\sim$, $\preceq$, $|$, etc.

Exemple 1.

- Sur $\mathbb{R}$, on peut définir la relation suivante : $x\mathcal{R}y \iff x \leq y$. Avec cette définition :

$$2\mathcal{R}3 \text{ est vrai} \qquad 3\mathcal{R}(-1) \text{ est faux}$$

- Sur $\mathbb{Z}$, on peut définir la relation "divise" : $b \mid a \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad a = kb$. Avec cette définition :

$$2 | \ 4 \text{ est vrai} \qquad 7 | \ 6 \text{ est faux} \qquad 0 \mid 0 \text{ est ....}$$

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On peut définir la relation "congru modulo m" : $a \equiv b \ [m] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad a - b = mk$. Avec cette définition :

$$14 \equiv 2 \ [3] \qquad \text{mais on a aussi} \qquad 14 \equiv 5 \ [3] \qquad 14 \equiv -1 \ [3] \quad \ldots$$

2 Relation d'équivalence

2.1 Définition

Définition 16.2 – Relation d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation (binaire) sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E si

1. $\mathcal{R}$ est réflexive, càd $\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$
2. $\mathcal{R}$ est symétrique, càd $\forall x, y \in E \quad x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$
3. $\mathcal{R}$ est transitive, càd $\forall x, y, z \in E \quad (x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$

Théorème 16.3

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. La relation "congru modulo m" est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$

1. Montrons que la relation est réflexive.

$$a \equiv a \left[m\right] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad a - a = mk$$

Comme $a - a = 0 = m \times 0$ on en déduit que $a \equiv a \left[m\right]$. Donc la relation est réflexive.

2. Montrons que la relation est symétrique. Supposons que $a \equiv b \left[m\right]$. Montrons que $b \equiv a \left[m\right]$. Tout d'abord, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = mk$. Alors, $b - a = m(-k)$. En posant $k' = -k \in \mathbb{Z}$, on a bien $b - a = mk'$. Ainsi, $b \equiv a \left[m\right]$. Donc la relation est symétrique.

3. Montrons que la relation est transitive. Supposons que $a \equiv b \left[m\right]$ et que $b \equiv c \left[m\right]$. Montrons que $a \equiv c \left[m\right]$. Par hypothèse, il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{cases} a - b = mk \\ b - c = mk' \end{cases} \qquad \text{donc} \quad a - c = mk'' \quad \text{avec } k'' = k + k' \in \mathbb{Z}$$

donc $a \equiv c \left[m\right]$.

□

Exemple 2.

- Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (par exemple $\alpha = 2\pi$), on peut montrer que la relation "congru modulo α" est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
- Dans tout ensemble E, la relation d'égalité $x\mathcal{R}y \iff x = y$ est aussi une relation d'équivalence.
- Sur $\mathbb{R}$, la relation $x\mathcal{R}y \iff x \leq y$ n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est pas ....

2.2 Aparté : union et intersection d'une famille quelconque d'ensembles

On a déjà évoqué au chapitre 2 (Ensembles) l'union et l'intersection d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de E. Nous allons généraliser cela à une famille $(A_i)_{i\in I}$ qui est indexée par un ensemble I non vide.

Définition 16.4 – Union et intersection

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E indexée par un ensemble I non vide (possiblement infini).

1. On définit l'intersection des A_i comme étant l'ensemble

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \left\{x \in E \mid \forall i \in I \quad x \in A_i\right\}$$

2. On définit la réunion des A_i comme étant l'ensemble

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \left\{x \in E \mid \exists i \in I \quad x \in A_i\right\}$$

3. On dit que les ensembles de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints si

$$\forall i, j \in I \qquad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$$

4. On dit que les ensembles de $(A_i)_{i\in I}$ sont disjoints dans leur ensemble si $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i = \varnothing$.

Exemple 3. Les ensembles

$$A = \{2, 3\} \qquad B = \{1, 3\} \qquad C = \{1, 2\}$$

sont disjoints dans leur ensemble, mais ne sont pas disjoints deux à deux.

Définition 16.5 – Partition

Avec les mêmes hypothèses que ci-dessus, on dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E si :

1. $\forall i \in I \quad A_i \neq \varnothing$
2. $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = E$
3. Les ensembles de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints.

Rappel : si la famille $(A_i)_{i\in I}$ est une partiiton de E, chaque élément de E est dans exactement un et un seul des ensembles de $(A_i)_{i\in I}$.

Exemple 4.

- La famille $\left([k, k+1[\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une partition de $\mathbb{R}$.
- La famille $(\{k\})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une partition de $\mathbb{Z}$, de même que la famille $(\{x\})_{x\in\mathbb{R}}$ est une partition de $\mathbb{R}$.
- Les ensembles $2\mathbb{Z}$ et $2\mathbb{Z}+1$ forment une partition de $\mathbb{Z}$.

2.3 Classes d'équivalence

Définition 16.6 – Classe d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Pour tout $x \in E$, on définit la classe d'équivalence de x comme étant l'ensemble

$$\mathrm{cl}(x) := \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

On la note parfois aussi $\bar{x}$. Un élément quelconque $y \in \bar{x}$ est dit un représentant de la classe.

Remarque. On a ainsi $y \in \mathrm{cl}(x) \iff x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x$ (par symétrie).

Exemple 5.

- Dans tout ensemble E, pour la relation $\mathcal{R}$ d'égalité [1], pour tout $x \in E$, on a

$$\mathrm{cl}(x) = \{y \in E \mid x = y\} = \{x\}$$

- Dans $\mathbb{Z}$, si on considère la relation "congru modulo 3", alors

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}(2) &= \left\{y \in \mathbb{Z} \mid y \equiv 2 \left[3\right]\right\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \quad y = 2 + 3k\} \\ &= \{2 + 3k \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= 2 + 3\mathbb{Z} \\ &= \{\cdots, -4, -1, 2, 5, 8, \cdots\}\end{aligned}$$

  - Dans cette classe, on peut prendre comme représentant 2, ou 5 ou encore -7, etc.
  - On peut remarquer que $\mathrm{cl}(2) = \mathrm{cl}(5) = \mathrm{cl}(8) = \mathrm{cl}(-1)$, etc.

Théorème 16.7 – Propriétés des classes d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Soit $x, y \in E$.

1. $x \in \mathrm{cl}(x)$. En particulier, $\mathrm{cl}(x) \neq \varnothing$.
2. Si $x\mathcal{R}y$, alors $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$.
3. **Les (différentes) classes d'équivalence forment une partition de E.**

Démonstration.

1. Par réflexivité de $\mathcal{R}$, on a $x\mathcal{R}x$ donc $x \in \mathrm{cl}(x)$.
2. On suppose que $x\mathcal{R}y$. Montrons que $\mathrm{cl}(x) \subset \mathrm{cl}(y)$. Soit $u \in \mathrm{cl}(x)$. On a donc $u\mathcal{R}x$. Comme de plus, on a $x\mathcal{R}y$, par transitivité on obtient $u\mathcal{R}y$, si bien que $u \in \mathrm{cl}(y)$. Par arbitraire sur u, on a ainsi $\mathrm{cl}(x) \subset \mathrm{cl}(y)$. De même, on montre que $\mathrm{cl}(y) \subset \mathrm{cl}(x)$. D'où $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$.

1. définie pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ par : $\quad x\mathcal{R}y \iff x = y$

3. La famille de toutes les classes d'équivalence de E est $(\text{cl}(x))_{x\in E}$. Cependant, deux ensembles de cette famille peuvent être égaux (comme $\text{cl}(2) = \text{cl}(5)$ dans l'exemple 5). On va donc considérer la famille de classes d'équivalences **distinctes**, qu'on note $(A_i)_{i\in I}$ (avec I un ensemble qui permet de paramétrer ces classes). Donc, par construction, si $i \neq j$, alors $A_i \neq A_j$.
   Pour tout $i \in I$, comme A_i est une classe d'équivalence, il existe $x_i \in E$ tel que $A_i = \text{cl}(x_i)$.
   Montrons que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E :
   (a) Montrons que $\forall i \in I \quad A_i \neq \varnothing$. Soit $i \in I$. On a $A_i = \text{cl}(x_i) \neq \varnothing$ par l'assertion 1.
   (b) Montrons que $\forall i, j \in I \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$. Soit $i, j \in I$ tels que $i \neq j$. Supposons par l'absurde que $A_i \cap A_j \neq \varnothing$. Il existe donc un élément $u \in \text{cl}(x_i) \cap \text{cl}(x_j)$. On en déduit que $x_i \mathcal{R} u$ et $u \mathcal{R} x_j$. Ainsi $x_i \mathcal{R} x_j$ et par l'assertion 2, on en déduit que $\text{cl}(x_i) = \text{cl}(x_j)$. Or, $i \neq j$ donc $A_i \neq A_j$. Contradiction. Donc $A_i \cap A_j = \varnothing$.
   (c) Montrons que $E = \bigcup_{i\in I} A_i$. Par définition de $\bigcup_{i\in I} A_i$, on a $\bigcup_{i\in I} A_i \subset E$. Montrons que $E \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Soit $x \in E$. Il faut montrer que $\exists i \in I \quad x \in A_i$. Comme $(A_i)_{i\in I}$ est la famille des classes d'équivalences distinctes, un élément de cette famille est $\text{cl}(x)$. Donc il existe $i \in I$ tel que $A_i = \text{cl}(x)$. Comme $x \in \text{cl}(x)$, on a donc $x \in A_i$. D'où le résultat.

   Finalement, les $(A_i)_{i\in I}$ forment bien une partition de E.

□

Exemple 6. Dans $\mathbb{Z}$, si on considère la relation "congru modulo 3", alors il y a 3 (différentes) classes d'équivalence :

$$\bar{0} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 0 \ [3]\} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}$$
$$\bar{1} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 1 \ [3]\} = 3\mathbb{Z} + 1$$
$$\bar{2} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 2 \ [3]\} = 3\mathbb{Z} + 2$$

On vérifie que ces 3 classes forment bien une partition de $\mathbb{Z}$. En particulier, tout entier est dans une et une seule de ces classes.

3 Relation d'ordre

3.1 Définitions

Définition 16.8 – Relation d'ordre

Une relation $\mathcal{R}$ définie sur E est une relation d'ordre si

1. $\mathcal{R}$ est réflexive, càd $\quad \forall x \in E \quad x \mathcal{R} x$
2. $\mathcal{R}$ est antisymétrique, càd $\quad \forall x, y \in E \quad (x \mathcal{R} y \quad \text{et} \quad y \mathcal{R} x) \implies x = y$
3. $\mathcal{R}$ est transitive, càd $\quad \forall x, y, z \in E \quad x \mathcal{R} y \quad \text{et} \quad y \mathcal{R} z \implies x \mathcal{R} z$

On appelle ensemble ordonné un couple $(E, \mathcal{R})$ où $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E.

Les relations d'ordre sont plutôt notées en général $\preceq$ que $\mathcal{R}$.

Exemple 7. ◦ Sur $\mathbb{R}$, la relation $x \preceq y \iff x \leq y$ est une relation d'ordre. On vérifie facilement la réflexivité et la transitivité. L'antisymétrie découle du fait que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x \leq y \quad \text{et} \quad y \leq x) \implies x = y$$

- ◦ Il en va de même pour la relation $x \preceq y \iff x \geq y$.
- ◦ Sur $\mathscr{P}(E)$, la relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre.
- ◦ Sur $\mathbb{R}$, la relation $x \preceq y \iff x < y$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas ....

Définition 16.9

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et $x, y \in E$. On dit que x, y sont comparables si $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.

Définition 16.10 – Ordre total et partiel

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. On dit que $\preceq$ définit un ordre total sur E si tout couple d'éléments de E sont comparables, i.e. :

$$\forall x, y \in E \quad (x \preceq y \quad \text{ou} \quad y \preceq x)$$

Si $\preceq$ n'est pas un ordre total, on dit que $\preceq$ est un ordre partiel.

En particulier, l'ordre est partiel si et seulement s'il existe deux éléments qui ne sont pas comparables.

Exemple 8. Parmi les exemples précédents :

- ◦ $\leq$ est une relation d'ordre total : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.
- ◦ Il en va de même pour $\geq$.
- ◦ Par contre, $\subset$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathscr{P}(E)$, sauf exception. Par exemple, avec $E = \{0, 1\}$, les ensembles $\{0\}$ et $\{1\}$ ne sont pas comparables car :

$$\{0\} \not\subset \{1\} \qquad \text{et} \qquad \{1\} \not\subset \{0\}$$

3.2 Vocabulaire lié à l'ordre, revisité

Définition 16.11 – Vocabulaire lié à l'ordre

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné, et A une partie de E.

- $m \in E$ est un minorant de A si $\quad \forall x \in A \quad m \preceq x$
- $M \in E$ est un majorant de A si $\quad \forall x \in A \quad x \preceq M$
- A est majorée (resp. minorée) si elle possède au moins un majorant (resp. minorant).
- A est bornée si A est majorée et minorée.
- $m \in E$ est **le** plus petit élément (ou minimum) de A si m est un minorant de A et $m \in A$.
- $M \in E$ est **le** plus grand élément (ou maximum) de A si M est un majorant de A et $M \in A$.

Théorème 16.12 – Unicité du maximum / minimum

Le plus petit élément (resp. le plus grand) de A, s'il existe, est unique.

Démonstration. Soit M_1, M_2 deux maxima de A. Comme M_2 est un majorant de A et que $M_1 \in A$, on en déduit que $M_1 \preceq M_2$. De même, on montre que $M_2 \preceq M_1$. Par antisymétrie de $\preceq$, on obtient $M_1 = M_2$. □

Exemple 9. Pour la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$, les notions de majorant et de maximum se confondent avec celles déjà vues au chapitre 11 (Nombres réels).

Exemple 10. On pose $E = \{0,1,2\}$. On munit $\mathscr{P}(E)$ de la relation d'ordre $\subset$ et on pose

$$A = \Big\{\{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}\Big\}$$

Déterminer un majorant de A. Est-ce que A admet un maximum ?

Soit $M \in \mathscr{P}(E)$. M est un majorant de A ssi $\forall X \in A \quad X \subset M$. On remarque que $M = E = \{0,1,2\}$ est bien un majorant de A.

Supposons par l'absurde que A admet un maximum. Soit $M \in A$ ce maximum. Si $M = \{0,1\}$, comme M majore A, on aurait en particulier $\{1,2\} \subset M$. Contradiction. On aboutit également à une contradiction avec $M = \{0,2\}$ et $M = \{1,2\}$. Finalement, A n'admet pas de maximum.

5 Méthodes pour les exercices

Méthode

Apprendre son cours.

6 Exercices (TD 16)

Exercice 1. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $x\mathcal{R}y \iff |x-y| \leq 1$

1. Vérifier si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive. Est-ce une relation d'équivalence ?
2. Mêmes questions avec $x\mathcal{R}y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1$

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes, muni de la relation $u\mathcal{R}v \iff \lim u_n = \lim v_n$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$.
3. Déterminer un ensemble qui contient exactement un représentant de chaque classe d'équivalence de E.

Exercice 4. On considère sur $\mathbb{N}^*$ la relation "divise" définie par :

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^* \qquad a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{N}^* \qquad b = ak$$

1. Montrer que c'est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$. Cet ordre est-il partiel ou total ?
2. On pose $A = \{2, 3, 5\}$. Justifier que A est bornée, mais ne possède ni maximum, ni minimum.
3. Que doit vérifier $M \in \mathbb{N}^*$ pour être un majorant de A ? Quel est le plus petit des majorants de A ?
4. On considère la relation "divise" sur $\mathbb{Z}^*$ définie par : $\forall a, b \in \mathbb{Z}^* \quad a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{Z}^* \quad b = ak$.
   Montrer la réflexivité et la transitivité de cette relation. Est-ce une relation d'ordre ?

Exercice 5. On considère sur $\mathbb{R}$ la relation suivante : $x \preceq y \iff e^{-x} \leq e^{-y}$

1. Démontrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Cet ordre est-il partiel ou total ?
2. Quels sont tous les majorants de $\{0\}$ pour $\preceq$? et tous les minorants ?

Exercice 6 (*Ordre lexicographique*)**.** On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation

$$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \iff (x_1 < x_2 \text{ ou } (x_1 = x_2 \text{ et } y_1 \leq y_2))$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 ($\star$)**.** Soit $\mathcal{R}$ une relation réflexive et transitive définie sur un ensemble E. On définit la relation $\mathcal{S}$ sur E par : $x\mathcal{S}y \iff (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x)$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence. On note F l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{S}$.
2. On définit la relation $\mathcal{T}$ sur F par : $\forall X, Y \in F \qquad X\mathcal{T}Y \iff (\exists (x, y) \in X \times Y \quad x\mathcal{R}y)$. Montrer que $\mathcal{T}$ définit une relation d'ordre.

Corrigé de l'exercice étoilé. La première question est une simple vérification. Passons à la seconde question. Soit $X, Y, Z \in F$.

- Montrons la réflexivité de $\mathcal{T}$. Par définition :

$$X \mathcal{T} X \iff \exists (x,y) \in X \times X \qquad x \mathcal{R} y$$

  Comme X est une classe d'équivalence, X est non vide. Il existe donc un élément x dans X. Alors, en posant $y = x \in X$, par réflexivité de $\mathcal{R}$, on a $x\mathcal{R}x$ donc $x\mathcal{R}y$. Ainsi $\mathcal{T}$ est réflexive.

- Montrons l'antisymétrie de $\mathcal{T}$. On suppose $X\mathcal{T}Y$ et $Y\mathcal{T}X$, donc

$$\text{il existe } (x,y) \in X \times Y \text{ tels que } x\mathcal{R}y$$

$$\text{il existe } (y',x') \in Y \times X \text{ tels que } y'\mathcal{R}x'$$

  Montrons que $X = Y$. Comme X et Y sont des classes d'équivalence pour $\mathcal{S}$, il suffit de montrer que $x''\mathcal{S}y''$ pour un certain $x'' \in X$ et $y'' \in Y$. On va montrer que $x'' = x$ et $y'' = y$ conviennent. Montrons donc que $x\mathcal{S}y$, ou encore $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$. Or, $x\mathcal{R}y$ est vrai par hypothèse. Il suffit de montrer que $y\mathcal{R}x$ (ce qui n'est pas immédiat car $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique !). Par hypothèse, on a $x\mathcal{R}y$ et $y'\mathcal{R}x'$. De plus, comme $x, x' \in X$ et que

  X est une classe d'équivalence de $\mathcal{S}$, on a $x'\mathcal{S}x$, donc en particulier $x'\mathcal{R}x$. On montre de même que $y\mathcal{S}y'$, donc en particulier $y\mathcal{R}y'$. D'où on a

$$y\mathcal{R}y' \quad \text{et} \quad y'\mathcal{R}x' \quad \text{et} \quad x'\mathcal{R}x$$

  Ainsi, par transitivité de $\mathcal{R}$, on a $y\mathcal{R}x$. On en déduit que $x\mathcal{S}y$. Cela permet de conclure que $X = Y$.

- Montrons la transitivité de $\mathcal{T}$. On suppose $X\mathcal{T}Y$ et $Y\mathcal{T}Z$, donc

$$\text{il existe } (x,y) \in X \times Y \text{ tels que } x\mathcal{R}y$$

$$\text{il existe } (y',z') \in Y \times X \text{ tels que } y'\mathcal{R}z'$$

  On va montrer que $x\mathcal{R}z'$, ce qui permettra de conclure que $X\mathcal{T}Z$. Or, comme $y, y' \in Y$ et que Y est une classe d'équivalence pour $\mathcal{S}$, on en déduit que $y\mathcal{S}y'$ donc en particulier $y\mathcal{R}y'$. Ainsi, par transitivité de $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}y' \\ y'\mathcal{R}z' \end{cases} \implies x\mathcal{R}z'$$

  d'où $X\mathcal{T}Z$.

Finalement, $\mathcal{T}$ est bien une relation d'ordre.