Chapitre 15

Convexité

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1 Généralités

1.1 Définition

Lemme 15.1 – Barycentre de deux points

Soit $x, y \in I$ tels que $x \leq y$. On a :

$$\left[x, y\right] = \left\{ \alpha x + (1-\alpha) y \;\middle|\; \alpha \in \left[0, 1\right] \right\}$$

Dit autrement, si on note $u_\alpha := \alpha x + (1-\alpha)y$, le point u_α parcourt le segment $[x, y]$ lorsque α parcourt $[0, 1]$:

Le point u_α est appelé barycentre des points (x, y) pondéré par les poids $(\alpha, 1-\alpha)$ (notion techniquement hors-programme).

Définition 15.2 – Fonction convexe

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est <u>convexe</u> sur I si

$$\forall x, y \in I \qquad \forall \alpha \in \left[0, 1\right] \qquad f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

ou encore, ce qui est équivalent,

$$\forall x, y \in I \qquad \forall \alpha \in \left]0, 1\right[\qquad x < y \implies f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Justifions cette équivalence. Il est clair que la première définition ci-dessus entraine la seconde. Montrons le sens réciproque. Posons $P(x, y, \alpha)$ l'assertion suivante :

$$P(x, y, \alpha) : \qquad f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

et supposons que $P(x, y, \alpha)$ est vraie lorsque $x < y$ et $0 < \alpha < 1$.

- Tout d'abord, $P(x, y, \alpha)$ est trivialement vraie lorsque $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ ou $x = y$. Ainsi, $P(x, y, \alpha)$ est vraie lorsque $x \leq y$ et $0 \leq \alpha \leq 1$.
- Il reste à montrer $P(x, y, \alpha)$ lorsque $x > y$ (et $0 \leq \alpha \leq 1$). Or, comme $y < x$, on en déduit que $P(y, x, 1-\alpha)$ est vraie. De plus, comme $1 - (1-\alpha) = \alpha$, on en déduit :

$$\begin{aligned} P(y, x, 1-\alpha) &\iff f((1-\alpha)y + \alpha x) \leq (1-\alpha) f(y) + \alpha f(x) \\ &\iff f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \\ &\iff P(x, y, \alpha) \end{aligned}$$

Ainsi, $P(x, y, \alpha)$ est vraie également dans le cas $x > y$. Les deux définitions données sont bien équivalentes.

1.2 Convexité et cordes

Définition 15.3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle <u>corde</u> de $\mathscr{C}_f$ tout segment qui relie deux points distincts de $\mathscr{C}_f$.

Dit autrement, pour tous $x, y \in I$ distincts, si on note A le point de coordonnées $(x, f(x))$ et B le point de coordonéees $(y, f(y))$, alors le segment $\left[AB\right]$ est une corde de $\mathscr{C}_f$.

Remarque. On suppose $x < y$. La corde qui relie $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$ est une droite : c'est donc la représentation graphique d'une fonction affine. On pose g la fonction :

$$\begin{aligned} g : \left[x, y\right] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(t - x) + f(x) \end{aligned}$$

On vérifie que g est une fonction affine, $g(x) = f(x)$ et $g(y) = f(y)$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_g$ correspond à la corde qui relie $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$. On notera que la pente de cette corde est donc $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

Théorème 15.4 – Position par rapport aux cordes

Une fonction f est convexe si et seulement si sa courbe $\mathscr{C}_f$ est *en-dessous* de toute corde qui relie deux de ses points.

Démonstration. Soit $x, y \in I$ tels que $x < y$. Par arbitraire sur x et y, il suffit de montrer que l'assertion

$$P(x,y): \quad \forall \alpha \in [0,1] \qquad f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

équivaut à l'assertion

$$Q(x,y): \quad \text{“}\mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de la corde qui relie } (x, f(x)) \text{ à } (y, f(y))\text{”}$$

Or, avec g la fonction de la remarque ci-dessus, l'assertion $Q(x,y)$ se réécrit :

$$Q(x,y): \quad \forall t \in [x,y] \quad f(t) \leq g(t)$$

ou encore, par le Lemme 15.1,

$$Q(x,y): \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad f(u_\alpha) \leq g(u_\alpha)$$

Cependant, on a $f(u_\alpha) = f(\alpha x + (1-\alpha)y)$ tandis que

On remarque alors que $P(x,y) \iff \big(\forall \alpha \in [0,1] \quad f(u_\alpha) \leq g(u_\alpha)\big) \iff Q(x,y)$. D'où le résultat. □

Exemple 1. On prouve ces exemples grâce à la représentation graphique pour le moment :

- Les fonctions suivantes sont convexes : $x \mapsto x^2$; $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$.
- La fonction $x \mapsto -x^2$ n'est pas convexe.

Exemple 2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto |x|$ est convexe (sur $\mathbb{R}$).

1.3 Fonction concave

Définition 15.5 – Fonction concave

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est <u>concave</u> si $-f$ est convexe, c'est-à-dire

$$\forall x,y \in I \qquad \forall \alpha \in [0,1] \qquad f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Théorème 15.6

Une fonction f est concave si et seulement si sa courbe $\mathscr{C}_f$ est *au-dessus* de toute corde qui relie deux de ses points.

Exemple 3. On prouve ces exemples grâce à la représentation graphique pour le moment :

- Les fonctions $\quad x \mapsto -x^2 \quad$ et $\quad x \mapsto \ln x \quad$ sont concaves.
- Toute fonction affine (en particulier toute fonction constante) est convexe et concave.
- La fonction $x \mapsto x^3$ n'est ni convexe, ni concave.

1.4 Inégalité de Jensen

Lemme 15.7 – Barycentre de n points

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Soit enfin $x_1, \cdots, x_n \in I$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in \Big[\min(x_1, \cdots, x_n) \quad , \quad \max(x_1, \cdots, x_n)\Big]$$

En particulier, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in I$.

Démonstration. On pose $m = \min(x_1, \cdots, x_n)$ et $M = \max(x_1, \cdots, x_n)$. Montrons que $m \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \leq M$. Il est clair que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$m \leq x_i \leq M \qquad \text{donc} \qquad \alpha_i m \leq \alpha_i x_i \leq \alpha_i M$$

On somme la dernière inégalité pour i allant de 1 à n :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M$$

Comme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, on en déduit que $m \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \leq M$. □

Le point $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ est appelé le barycentre des points $(x_i)_{1<i<n}$, pondérés par les poids $(\alpha_i)_{1<i<n}$ (hors-programme).

Théorème 15.8 – Inégalité de Jensen

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \cdots, x_n \in I$. Soit $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

- Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$
- Si $f : I \to \mathbb{R}$ est concave, alors
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

Attention à bien vérifier que les $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ soient tous positifs et que leur somme fasse 1. **Cette inégalité est très souvent utilisée en prenant** $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$.

La formule pour une fonction concave f se déduit en appliquant la première formule à la fonction convexe $-f$, puis à multiplier par -1, ce qui change le sens de l'inégalité. Plus généralement, les propriétés qui suivent des fonctions convexes ont leur équivalent pour les fonctions concaves en changeant le sens des inégalités où intervient f.

Exemple 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer que $(x_1 + \ldots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$.

1.5 Caractérisation par l'inégalité des pentes

Théorème 15.9 – Inégalité des pentes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction

- Si f est convexe, alors pour tous $x, y, z \in I$,

$$x < y < z \implies \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

- Si f est concave, alors pour tous $x, y, z \in I$,

$$x < y < z \implies \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Démonstration. On ne fait la preuve que pour f convexe.

□

Ce résultat admet une réciproque : si $f : I \to \mathbb{R}$ vérifie l'inégalité des pentes (pour tous points $x < y < z$) alors f est convexe. Il est même suffisant de vérifier une seule des deux inégalités, par exemple

$$\left(\forall x, y, z \in I \qquad x < y < z \implies \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}\right) \implies f \text{ est convexe}$$

Pour le prouver, on peut procéder comme pour la preuve du sens réciproque du Théorème 15.11, cf plus loin. Ce résultat constitue du "semi hors-programme".

Rappel : pour tout $a \in I$, le taux d'accroissement de f en a, est l'application qu'on notera :

$$\begin{aligned} \tau_a : I \setminus \{a\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

Corollaire 15.10 – Hors-programme

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, τ_a est croissante (sur $I \setminus \{a\}$).
- f est concave si et seulement si pour tout $a \in I$, τ_a est décroissante (sur $I \setminus \{a\}$).

Démonstration. On ne prouve que le premier point. Par ce qui précède, il suffit de montrer que f vérifie l'inégalité des pentes (pour une fonction convexe) si et seulement si pour tout $a \in I$, τ_a est croissante.

- Supposons que τ_a est croissante pour tout $a \in I$. Alors pour tous $x, y, z \in I$

$$\begin{aligned} x < y < z &\implies \tau_x(y) \leq \tau_x(z) \\ &\implies \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \end{aligned}$$

  et donc f vérifie l'inégalité des pentes pour une fonction convexe donc est convexe (hors-programme).
- Réciproquement, supposons f convexe, et montrons que pour tout $a \in I$, τ_a est croissante. Soit $x, y \in I \setminus \{a\}$ avec $x < y$. Montrons que $\tau_a(x) \leq \tau_a(y)$. On distingue 3 cas :
  - Si $a < x < y$, alors par l'inégalité des pentes,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \implies \tau_a(x) \leq \tau_a(y)$$

  - Si $x < a < y$, alors par l'inégalité des pentes,

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \implies \tau_a(x) \leq \tau_a(y)$$

  - Si $x < y < a$, alors par l'inégalité des pentes,

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(a) - f(y)}{a - y} \implies \tau_a(x) \leq \tau_a(y)$$

  Par arbitraire sur x, y, la fonction τ_a est donc croissante.

□

2 Convexité et dérivabilité

2.1 Caractérisation par la dérivée

Théorème 15.11 – Convexité et dérivée première

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

- f est convexe si et seulement si f' est croissante.
- f est concave si et seulement si f' est décroissante.

Démonstration. On ne prouve que le premier point, en procédant par double implication.

Sens direct : supposons que f est convexe. Soit $x, z \in I$ tels que $x < z$. Montrons que $f'(x) \leq f'(z)$. Soit y un point quelconque de $\left]x, z\right[$. Comme f est convexe, on déduit de l'inégalité des pentes :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

Comme f est dérivable en x, on peut passer à la limite quand y tend vers x (en laissant x, z fixés). On obtient $f'(x) \leq \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$. Or, par l'inégalité des pentes, on a aussi

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Et en passant à la limite quand y tend vers z (en laissant x, z fixés), on obtient $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq f'(z)$. Ainsi,

$$f'(x) \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq f'(z)$$

Par arbitraire sur x, z, on en déduit que f' est croissante.

□

Remarque. La preuve ci-dessus montre en particulier que si f est convexe et dérivable, alors

$$\forall x, z \in I \qquad x < z \implies \left(f'(x) \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq f'(z) \right)$$

Corollaire 15.12

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.

- f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.
- f est concave si et seulement si $f'' \leq 0$.

Ceci permet de justifier facilement les Exemples 1 et 3.

2.2 Position par rapport à la tangente

Théorème 15.13

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

- Si f est convexe, alors pour tout $a \in I$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est *au-dessus* de sa tangente en a :

$$\forall x \in I \qquad f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$$

- Si f est concave, alors pour tout $a \in I$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est *en-dessous* de sa tangente en a :

$$\forall x \in I \qquad f(x) \leq f'(a)(x - a) + f(a)$$

Démonstration. On ne prouve que le premier point. Soit $a \in I$. Montrons que pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$$

L'inégalité est évidemment vraie si $x = a$. Supposons donc $x \neq a$.

- Si $x < a$, alors comme f est convexe et dérivable, par la remarque ci-dessus (avec $z = a$), on en déduit que

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq f'(a) \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq f'(a)$$

D'où, comme $x - a < 0$, on en déduit que $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$.

- Si $x > a$, alors en appliquant la même remarque entre les points a et x, on obtient :

$$f'(a) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

et on en déduit facilement que $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$.

Dans tous les cas, on a donc l'inégalité voulue. □

Exemple 5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x \geq 1 + x$.

Remarque. La propriété 15.13 montre que, si f et convexe et si a est un point critique de f, alors pour tout $x \in I$, on a $f(x) \geq f(a)$. Autrement dit, tout point critique d'une fonction convexe est un minimum global. De même, tout point critique d'une fonction concave est un maximum global.

3 Sécante

Définition 15.14

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle sécante de $\mathscr{C}_f$ toute droite qui passe par deux points distincts de $\mathscr{C}_f$.

Dit autrement, pour tous $a, b \in I$ distincts, si on note A le point de coordonnées $(a, f(a))$ et B le point de coordonéees $(b, f(b))$, alors la droite (AB) est une sécante de $\mathscr{C}_f$.

Théorème 15.15

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a, b \in I$ avec $a < b$.

- Sur $[a, b]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est *en-dessous* de la sécante (AB).
- Sur $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est *au-dessus* de la sécante (AB).

Le premier point est un résultat déjà connu car, sur $[a, b]$, la sécante (AB) coïncide avec la corde $[AB]$.
Bien entendu, ce résultat s'adapte aux fonctions concaves : si f est concave, la courbe $\mathscr{C}_f$ est *au-dessus* de la sécante (AB) sur $[a, b]$, mais *en-dessous* de la sécante (AB) sur $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$.

4 Méthodes pour les exercices

Les méthodes sont présentées dans le cas d'une fonction convexe, mais s'adaptent au cas d'une fonction concave.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction f est convexe, on peut :

- Si f est deux fois dérivable, montrer que f'' est positive.
- Si f est dérivable, montrer que f' est croissante.
- Sinon, utiliser la définition.

Méthode

Pour montrer certaines inégalités, on peut utiliser un argument de convexité :

- Si l'inégalité est de la forme $f(x) \geq \alpha x + \beta$ avec f convexe, on peut regarder si $y = \alpha x + \beta$ est l'équation d'une tangente de $\mathscr{C}_f$.
- Si l'inégalité est de la forme $f(x) \leq \alpha x + \beta$ avec f convexe, on peut regarder si $y = \alpha x + \beta$ est l'équation d'une corde de $\mathscr{C}_f$, notamment si cette inégalité n'est demandée que pour tout x dans un segment $[a, b]$.
- Si, après réécriture, on remarque que l'inégalité à montrer se déduit de l'inégalité de Jensen. C'est typiquement le cas pour des inégalités faisant intervenir n points $x_1, \cdots, x_n$.

Le second point peut également s'adapter pour une inégalité du type $f(x) \geq \alpha x + \beta$ au moyen d'une sécante, mais son cas d'utilisation est plus rare.