Chapitre 14

Dérivation

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ non triviaux.
De plus, a est un point de I (donc forcément fini).

On rappelle que $\mathring{I}$ désigne l'ensemble des points de I qui ne sont pas des extrémités de I.

1 Dérivée d'une fonction

1.1 Nombre dérivé

Définition 14.1 – Nombre dérivé

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite *finie* en a. Cette limite est appelée nombre dérivé de f en a. Il est noté $f'(a)$.

Par abus, on dit parfois que $f'(a)$ est la "dérivée de f en a".

Remarque.

- On trouve aussi la notation $\dfrac{df}{dx}(a)$ en physique.
- Pour être dérivable en a, il faut donc au moins être défini en a. Le point a doit donc appartenir à I.
- Lorsque la limite existe, on a donc
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$
- En posant $x = a+h$ dans la limite ci-dessus, on peut réécrire (par composition) :
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Remarque (Nombre dérivée et tangente)**.** Lorsque f est dérivable en a, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en a d'équation
$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Remarque (Taux d'accroissement et pente de la corde)**.** Pour $a \in I$ fixé, l'application
$$\begin{aligned} \tau_a : I \setminus \{a\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{aligned}$$
est appelée taux d'accroissement de f en a. $\tau_a(x)$ représente la pente de la corde qui relie le point $(a, f(a))$ au point $(x, f(x))$ de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Théorème 14.2 – Développement limité d'ordre 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est dérivable en a.

(ii) Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in I \quad f(x) = f(a) + \ell(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0 \tag{$*$}$$

Lorsque ces conditions sont vérifiées, on a alors $\ell = f'(a)$.

Lorsque f vérifie $(*)$, on dit que <u>f admet un développement limité d'ordre 1 en a</u>. En posant $x = a+h$ et $\alpha(h) := \varepsilon(a+h)$, alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I$, le reste de l'assertion $(*)$ se réécrit comme

$$f(a+h) = f(a) + \ell h + \alpha(h)h \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0$$

Démonstration. Supposons (ii) et montrons (i). Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on réécrit $(*)$ ainsi :

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell$$

Comme $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$, on en déduit que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

de sorte que f est dérivable en a et $\ell = f'(a)$. Ainsi, (i) est vraie.

Supposons maintenant (i) et montrons (ii). Pour tout $x \in I$, on pose

$$\varepsilon(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

On vérifie alors que la première assertion de (ii) est vraie avec $\ell = f'(a)$: si $x \in I \setminus \{a\}$ c'est une réécriture, et pour $x = a$, cela revient à écrire $f(a) = f(a) + 0 + 0$. Enfin, comme f est dérivable en a, il est clair que $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. D'où (ii) est vraie. □

Exemple 1. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(e^{-\frac{1}{|x|}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. En utilisant un DL, déterminer $f'(0)$.

Théorème 14.3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

□

1.2 Fonction dérivée

Définition 14.4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est <u>dérivable</u> si elle est dérivable en tout point de I. On note alors

$$\begin{aligned} f' : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

On dit que f' est <u>l'application dérivée de f</u> ou simplement <u>la dérivée de f</u>.

Attention ! La notation $'$ est réservée aux *fonctions* : on évitera donc d'écrire « $(\sqrt{x})'$ » ou « $(x^n)'$ », car x^n et $\sqrt{x}$ sont des nombres, pas des fonctions. Par contre la fonction $\cos'$ et le réel $\arctan'(x)$ ont un sens au même titre que f' et $f'(x)$ pour une fonction f dérivable.

Exemple 2. cos est dérivable (sur $\mathbb{R}$) et $\cos' = -\sin$

Remarque. Par abus de langage, si $X \subset \mathbb{R}$ est une réunion disjointe d'intervalles non triviaux, on dit que f est dérivable sur X si f est dérivable en tout point de X. Par exemple,

- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dite dérivable (sur $\mathbb{R}^*$) car elle l'est en tout point de $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^*$
- la fonction tan est dite dérivable (sur $D_{\tan}$) car elle l'est en tout point de $D_{\tan} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$.

Remarque. Similairement à la continuité, la dérivabilité est soumise à une convention subtile : dire qu'une fonction f est dérivable sur un ensemble X ne signifie pas que $f\big|_X$ est dérivable : par exemple avec $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$, la fonction f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car elle n'est pas dérivable au point 0 (car non continue). Cependant, la fonction $f\big|_{\mathbb{R}_+}$, qui est constante égale à 1, est bien dérivable (sur $\mathbb{R}_+$).

Théorème 14.5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable (sur I), alors f est continue (sur I).

1.3 Opérations sur les dérivées

Rappel : si $u, v : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables en a (resp. sur I) alors

- La fonction uv est dérivable en a (resp. sur I) et $(uv)'(a) = \ldots$ (resp. $(uv)' = \ldots$)
- Idem pour $\lambda u + \mu v$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, pour $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ si v ne s'annule pas en a (resp. sur I), et pour la composée $v \circ u$ lorsque cela a un sens.

Théorème 14.6 – Inverse

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et soit $y \in J$. La fonction $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en y si et seulement si f est dérivable en $f^{-1}(y)$ et $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. Lorsque c'est le cas,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Démonstration. On ne démontre que le sens direct.

□

On rappelle qu'un intervalle J est dit ouvert s'il est de la forme $\left]a,b\right[$ avec $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 14.7 – Non officiel en MPSI

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et J un intervalle *ouvert* inclus dans I. La fonction f est dérivable en a ssi $f\big|_J$ est dérivable en a et lorsque c'est le cas, $f'(a) = \left(f\big|_J\right)'(a)$.

Exemple 3. Soit $f : x \mapsto |P(x)|$ avec $P(x) = (x-1)(x+3)$.

- Pour tout $x \in \left]-\infty,-3\right[$, on a $f(x) = (x-1)(x-3) = P(x)$. Comme $\left]-\infty,-3\right[$ est ouvert et que P est dérivable, on en déduit que f est dérivable en x et
$$f'(x) = P'(x) = 2x-3$$
- Pour tout $x \in \left]-3,1\right[$, on a $f(x) = -(x-1)(x-3) = -P(x)$. Comme $\left]-3,1\right[$ est ouvert et que P est dérivable, on en déduit que f est dérivable en x et
$$f'(x) = P'(x) = -2x+3$$
- Pour tout $x \in \left]1,+\infty\right[$, on a montre de même que $f'(x) = 2x-3$.

1.4 Dérivées à droite et à gauche

Définition 14.8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On suppose que $a \neq \sup I$, càd a n'est pas l'extrémité supérieure de I. On dit que f est dérivable à droite en a si la fonction
$$f_d := f\big|_{I \cap \left[a,+\infty\right[}$$
est dérivable en a, et on définit la dérivée de f à droite en a par
$$f'_d(a) := \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
- On suppose que $a \neq \inf I$ càd a n'est pas l'extrémité inférieure de I. On dit que f est dérivable à gauche en a si la fonction
$$f_g := f\big|_{\left]-\infty,a\right] \cap I}$$
est dérivable en a, et on définit la dérivée de f à gauche en a par
$$f'_g(a) := \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a ssi $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente à gauche (resp. à droite) en a et $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$) correspond alors à la pente de cette demi-tangente.

Exemple 4. La fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0, avec $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$.

Remarque.

- Les notations f_g et f_d ci-dessus ne sont en fait pas officielles. Par contre $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ sont couramment utilisées.
- Si f est dérivable à droite en a, elle est continue à droite en a : il suffit d'appliquer la Proposition 14.3 à $f\big|_{I\cap\left[a,+\infty\right[}$.
- Si $a = \sup(I)$, alors $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et donc f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche en a.
- De même, si $a = \inf(I)$, alors f est dérivable en a ssi f est dérivable à droite en a.

Théorème 14.9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $a \in \mathring{I}$. Alors

$$f \text{ est dérivable en } a \qquad \text{ssi} \qquad \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche en } a \\ f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f'_g(a) = f'_d(a) \end{cases}$$

Lorsque c'est le cas, on a $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Exemple 5. La fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0, avec $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$. Cependant, f n'est pas dérivable en 0.

2 Extremum

Définition 14.10 – Extremum global

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que ...

- f admet un <u>maximum (global) en a</u> si $\quad \forall x \in D \qquad f(x) \leq f(a)$
- f admet un <u>minimum (global) en a</u> si $\quad \forall x \in D \qquad f(x) \geq f(a)$
- f admet un <u>extremum (global) en a</u> si f admet en a un maximum (global) ou un minimum (global).

Attention à ne pas confondre la valeur de l'extremum, i.e. $f(a)$, et l'un des points en lequel il est atteint, i.e. a.
Si f admet un maximum en a, alors $-f$ admet un minimum en a.

Définition 14.11 – Extremum local

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que ...

- f admet un maximum local en a si $f \leq f(a)$ au voisinage de a :

$$\exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta] \qquad f(x) \leq f(a)$$

- f admet un minimum local en a si $f \geq f(a)$ au voisinage de a :

$$\exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta] \qquad f(x) \geq f(a)$$

- f admet un extremum local en a si f admet en a un maximum local ou un minimum local.

Remarque (Local et global)**.** Un extremum global est un extremum local. La réciproque est fausse : la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ admet un maximum local en 0 mais ce n'est pas un maximum global.

Définition 14.12

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que a est un point critique de f si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$.

Dit autrement, **un point critique est un point où f possède une tangente horizontale**.

Théorème 14.13

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $a \in \mathring{I}$. Si f admet un extremum local en a, alors a est un point critique de f.

Remarque. La réciproque du Théorème 14.13 est *fausse* : un point critique n'est pas nécessairement un extremum local. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^3$ admet 0 pour point critique, mais ce n'est ni un maximum local, ni un minimum local.

Démonstration. On démontre ce résultat lorsque f admet en a un maximum local. Par définition, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a-\eta, a+\eta]$, on a $f(x) \leq f(a)$, donc

$$f(x) - f(a) \leq 0$$

- Si $x > a$, on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$. D'où par passage à la limite,

$$f'(a) = f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$$

- Si $x < a$, on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. D'où par passage à la limite,

$$f'(a) = f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$$

Finalement, $0 \leq f'(a) \leq 0$ donc $f'(a) = 0$. □

Remarque (Lorsque a est au bord)**.** L'hypothèse $a \in \mathring{I}$ est essentielle pour le Théorème 14.13 : ce théorème tombe en défaut si a est une extrémité de I. Par exemple la fonction identité sur $\left[0,1\right]$ admet un minimum en 0 et un maximum en 1 alors que ce ne sont pas des points critiques.

Méthode

Pour trouver un extremum global, on peut recourir à un tableau de variations.
Pour un extremum local, cela marche aussi, mais on verra d'autres outils plus précis plus tard.

3 Les grands théorème sur la dérivation

3.1 Théorème de Rolle

Théorème 14.14 – Théorème de Rolle

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f : \left[a, b\right] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$\square$

3.2 Le théorème des accroissements finis

Théorème 14.15 – Théorème des Accroissements Finis (TAF)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

Démonstration. On pose

$$\begin{aligned} g : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \end{aligned}$$

La fonction g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ comme somme et produit de telles fonctions. De plus,

$\square$

3.3 Dérivation et monotonie

Définition 14.16

On dit qu'un point $a \in I$ est un point intérieur de I si $a \in \mathring{I}$, i.e. si a n'est pas une extrémité de l'intervalle I.

Théorème 14.17

On rappelle que I est un $\boxed{\text{intervalle}}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable en tout point intérieur de I. Alors :

- f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ en tout point intérieur de I.
- f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ en tout point intérieur de I.
- f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ en tout point intérieur de I.

Remarque. Le théorème tombe en défaut si on ne l'applique pas sur un intervalle. Contre-exemple : la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a une dérivée négative en tout point de $\mathbb{R}^*$, mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Démonstration. On ne démontre que la première équivalence. On procède par double implication.

- Supposons $f' \geq 0$ en tout point intérieur à I et montrons que f est croissante.

- Supposons f croissante. Soit a un point intérieur de I : montrons que $f'(a) \geq 0$. Soit $x \in I$ tel que $x > a$ (un tel x existe car $a \in \mathring{I}$). Comme f est croissante,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

et en passant à la limite quand x tend vers a^+, comme f est dérivable en a, on obtient $f'(a) \geq 0$.

□

Théorème 14.18

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable en tout point intérieur de I. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est strictement croissante sur I.
- $f' \geq 0$ en tout point intérieur de I, et pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$, on a $f'\big|_{]a,b[} \not\equiv 0$.

La deuxième condition peut également se réécrire : f' est positive sur $\mathring{I}$ et il n'y a pas d'intervalle non trivial $J \subset \mathring{I}$ sur lequel f' est identiquement nulle. En particulier, si $f' \geq 0$ et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.

Exemple 6. La fonction $x \mapsto x - \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée est positive et ne s'annule que sur $2\pi\mathbb{Z}$.

3.4 Inégalité des accroissements finis

Définition 14.19 – Fonction lipschitzienne

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $K \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est K-lipschitzienne si

$$\forall x, y \in I \qquad |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|$$

Une fonction f est dite lipschitzienne s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que f est K-lipschitzienne.

Exemple 7.

- La fonction $x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne (mais aussi 2-lipschitzienne, π-lipschitzienne...)
- La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne, mais sa restriction à $[-1, 1]$ est 2-lipschitzienne car

$$\forall x, y \in [-1, 1] \qquad \left|x^2 - y^2\right| = |(x+y)(x-y)| \leq |x+y| \times |x-y| \leq 2\,|x-y|$$

Exemple 8. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne.

Théorème 14.20

Toute fonction lipschitzienne est continue.

Démonstration. Soit $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction K-lipschitzienne. On a

$$|f(x) - f(a)| \leq K|x - a| \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

donc $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$. Ainsi f est continue en a. Par arbitraire sur a, f est continue (sur I). □

Théorème 14.21 – Inégalité des Accroissements Finis (IAF)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. S'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathring{I}$, on a $|f'(x)| \leq K$, alors

$$\forall x, y \in I \qquad |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y| \qquad \text{(càd } f \text{ est } K\text{-lipschitzienne)}$$

Démonstration. Soit $x, y \in I$. Montrons que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Si $x = y$, c'est évident. Si $x \neq y$, quitte à échanger les rôles de x et y, on peut considérer que $x < y$.

□

Remarque. L'implication de l'IAF est en fait une équivalence : si f est K-lipschitzienne (et dérivable en tout point intérieur de I), alors $|f'|$ est majorée par K.

Théorème 14.22

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Alors f est K-lipschitzienne avec $K = \max\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

Démonstration. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, f' est continue sur $[a, b]$ donc par composition il en va de même pour $|f'|$. Par le théorème des bornes atteintes, la fonction $|f'|$ est donc bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint son maximum et on peut poser

$$K := \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

Alors, par l'IAF, pour tous $x, y \in [a, b]$, on a bien $\quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. □

Dans le théorème précédent, on s'est restreint à $\left[a,b\right]$ pour assurer que f atteint son maximum sur $\left[a,b\right]$. Plus généralement, pour $f : I \to \mathbb{R}$, s'il existe $K \geq 0$ tel que

$$\sup_{x\in I}\left|f'(x)\right| \leq K$$

alors pour tous $x, y \in I$ tels que $x < y$, en appliquant l'IAF à $\left[x,y\right]$, on obtient que $|f(x)-f(y)| \leq K|x-y|$, càd f est K-lipschitzienne sur I.

Exemple 9. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|$.

3.5 Limite épointée

Avant de pouvoir aller plus loin, il faut étendre la notion de limite à un cadre légèrement plus général.

Définition 14.23 – Limite épointée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que <u>f admet une limite épointée en a</u> si $f\big|_{I\setminus\{a\}}$ admet une limite en a. On la note

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$$

La fonction f est donc définie en a, mais la valeur de $f(a)$ n'a aucune incidence sur l'existence éventuelle et la valeur de la limite épointée en a.

Exemple 10. $f : x \mapsto \left\lfloor -x^2 \right\rfloor$ vérifie $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = -1$. Par contre, f n'admet pas de limite en 0.

Exemple 11. $f : x \mapsto \begin{cases} \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ -7 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ vérifie $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = -\infty$. Par contre, f n'admet pas de limite en 0.

Remarque (Limite épointée en une extrémité). Lorsque a est une extrémité de I, la notion de limite épointée équivaut à celle de limite à gauche ou à droite :

- Si $a = \inf I$, alors f admet une limite épointée en a si et seulement si f admet une limite à droite en a, et dans ce cas

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

- Si $a = \sup I$, alors f admet une limite épointée en a si et seulement si elle admet une limite à gauche en a, et dans ce cas

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Théorème 14.24 – Limite épointée en un point intérieur

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $a \in \mathring{I}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- La fonction f admet une limite épointée en a
- f admet une limite à gauche et à droite en a, et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

De plus, lorsque ces assertions sont vérifiées, toutes ces limites sont égales :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

On notera que, comme $a \in \mathring{I}$, les intervalles $I \cap \left]-\infty, a\right[$ et $I \cap \left]a, +\infty\right[$ sont donc non triviaux : c'est un cadre cohérent pour parler de limites à gauche et à droite en a.

Remarque (Limite et limite épointée)**.**

- Si f admet une limite en a, alors f admet une limite épointée en a (et ces limites sont égales). La réciproque est fausse, cf exemple 10.
- Cependant, si f admet une limite épointée en a et que cette limite vaut $f(a)$, alors f admet une limite en a, et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$. Dans ce cas, on a même que f est continue en a.

Dans l'exemple 1, la fonction $\varepsilon(x) = \begin{cases} x \sin\left(e^{-\frac{1}{|x|}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ vérifie $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \varepsilon(x) = 0 = \varepsilon(0)$ de sorte que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

3.6 Théorème de la limite de la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction qu'on suppose dérivable sur $I \setminus \{a\}$ avec $a \in \mathring{I}$. On souhaite savoir si f est aussi dérivable en a. On pourrait étudier la limite du taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ quand x tend vers a. Mais dans certains (rares) cas, trouver cette limite est difficile et il est plus simple d'utiliser le résultat suivant pour conclure.

Théorème 14.25 – Théorème de limite de la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si f' admet une limite épointée (finie ou non) en a, càd si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$. En particulier :

- Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
- Si $\ell = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, et donc f n'est pas dérivable en a.

Dans le premier cas, on a en particulier $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = f'(a)$, de sorte que f' est continue en a.
Dans le second cas, on a en particulier que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale en a.

Démonstration. Soit $x \in I \setminus \{a\}$. On pose

$$J = \begin{cases} [a,x] & \text{si } x > a \\ [x,a] & \text{si } x < a \end{cases} \qquad \text{et donc} \qquad \mathring{J} = \begin{cases}]a,x[& \text{si } x > a \\ ]x,a[& \text{si } x < a \end{cases}$$

Appliquons le TAF à f sur J. f est continue sur I donc sur J. De plus f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ donc est dérivable sur $\mathring{J}$. Ainsi, le TAF s'applique : il existe $c_x \in \mathring{J}$ tel que

$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Or, comme c_x est strictement compris entre a et x, on a

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} c_x = a \qquad \text{avec} \quad c_x \neq a$$

De plus, par hypothèse, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Par composition, on a donc

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(c_x) = \ell \qquad \text{donc} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ (x \neq a)}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

D'où le résultat. $\square$

Pour vérifier si f est dérivable en a, on regarde le plus souvent si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. Cependant, il arrive que cette limite soit compliquée à calculer pour certaines fonctions f, tandis que la limite de $f'(x)$ quand x tend vers a est plus simple. Le théorème de la limite de la dérivée s'avère alors très utile.

Exemple 12. Montrer que $f : x \mapsto \arcsin(1 - x^4)$ est dérivable en 0.

4 Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

4.1 Définition

Par convention, on note $f^{(0)} = f$.

Définition 14.26 – Ensembles $\mathscr{D}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit (de manière récursive) qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable si la fonction $f^{(n-1)} : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, et la dérivée de cette fonction est alors notée $f^{(n)}$. On a ainsi

$$f^{(0)} = f \qquad f^{(1)} = f' \qquad f^{(2)} = f'' \qquad \text{etc.}$$

On note $\mathscr{D}^n(I,\mathbb{R})$, ou juste $\mathscr{D}^n(I)$, l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si $f \in \mathscr{D}^n(I)$, alors on dit que $f^{(n)}(a)$ est la dérivée n-ième de f (évaluée) en a.
Comme $f^{(0)} = f$, par convention, toute fonction est "0 fois dérivable". Plus précisément cette assertion n'affirme rien et elle est considérée comme vraie (vide logique).

Définition 14.27 – Classe $\mathscr{C}^n$ et $\mathscr{C}^\infty$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $n \in \mathbb{N}$.

- On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue.
- On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On note $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ ou juste $\mathscr{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ ou juste $\mathscr{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque.

- En particulier $\mathscr{C}^0(I) = \mathscr{C}(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathscr{C}^{n+1}(I) \subset \mathscr{D}^{n+1}(I) \subset \mathscr{C}^n(I)$.
  - En effet si $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I)$, alors f est en particulier $n+1$ fois dérivable et donc $f \in \mathscr{D}^{n+1}(I)$
  - Par ailleurs, si $f \in \mathscr{D}^{n+1}(I)$, alors f est en particulier n fois dérivable, et comme $f^{(n)}$ est dérivable, elle est également continue. D'où $f \in \mathscr{C}^n(I)$.
- Plus généralement, on peut écrire :

$$\mathscr{C}^0(I) \supset \mathscr{C}^1(I) \supset \mathscr{C}^2(I) \supset \ldots \supset \mathscr{C}^\infty(I)$$

$$\mathscr{C}^\infty(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{C}^n(I)$$

Exemple 13 (Important)**.** Toute fonction polynômiale est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Toute fonction rationnelle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.

Exemple 14.

- Les fonctions exp, ln, cos, sin, tan... sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ (sur leur ensemble de définition).
- Soit $f : x \mapsto |x|$. On a $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ mais $f \notin \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$ car f n'est pas dérivable en 0.
- Soit $f : x \mapsto x^{3/2}$. On a $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+)$ mais $f \notin \mathscr{D}^2(\mathbb{R}_+)$ car pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$, donc f' n'est pas dérivable en 0.

Méthode

Pour calculer la dérivée n-ième d'une fonction f :

1. On trouve d'abord au brouillon une formule de récurrence pour $f^{(n)}$.
2. On démontre cette formule par une récurrence, en n'oubliant pas de justifier la dérivabilité de $f^{(n)}$ pour calculer $f^{(n+1)}$.

Toutefois, il n'est pas nécessaire de justifier la dérivabilité de $f^{(n)}$ si on a montré que f est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$.

Exemple 15. Soit $k, n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée k-ième de $f : x \mapsto x^n$.

Remarque. On évitera d'écrire " $f^{(\infty)}$ ", cette fonction ne serait pas bien définie (sauf cas particuliers...).

4.2 Propriétés des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

Théorème 14.28 – Combinaisons linéaires

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{C}^n(I)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^n(I)$. De plus, si $n \neq +\infty$,

$$\forall x \in I \qquad (\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x)$$

Théorème 14.29 – Produit – Formule de Leibniz

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{C}^n(I)$, on a $fg \in \mathscr{C}^n(I)$. De plus, si $n \neq +\infty$,

$$\forall x \in I \qquad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$$

Exemple 16. Soit $f : x \mapsto x^2 e^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et calculer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le calcul ci-dessus nécessite une certaine rigueur. Comme $g^{(k)}(x) = 0$ pour tout $k \geq 3$, on peut être tenté d'écrire :

$$(!) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{\boxed{n}} \binom{n}{k} g^{(k)}(x)\, h^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{\boxed{2}} \binom{n}{k} g^{(k)}(x)\, h^{(n-k)}(x)$$

Mais ce n'est pas exact pour $n \leq 1$. Par exemple pour $n = 1$, la somme de droite contient le terme (pour $k = 2$)

$$\underbrace{\binom{1}{2}}_{=0} g^{(2)}(x)\, \underbrace{h^{(-1)}(x)}_{(?)}$$

Théorème 14.30 – Quotient

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Soit $f, g \in \mathscr{C}^n(I)$. Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^n(I)$.

Théorème 14.31 – Composition

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Soit $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^n(J, \mathbb{R})$, avec $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f \in \mathscr{C}^n(I)$.

Démonstration. Non exigible. □

Théorème 14.32 – Réciproque

Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et $f : I \to J$ une bijection de classe $\mathscr{C}^n$. On suppose que la dérivée *première* f' ne s'annule pas sur I.
Alors $f^{-1} : J \to I$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^n$.

Démonstration. Non exigible. □

Exemple 17. Soit $f : I \to J$ une bijection de classe $\mathscr{C}^2$ dont la dérivée f' ne s'annule pas sur I. On a donc, pour tout $y \in J$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

On remarque alors que $(f^{-1})'$ est dérivable en y par composée et quotient de fonctions dérivables, et que :

$$(f^{-1})''(y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Comme on peut le voir, pour que cette expression ait un sens, il suffit que f' ne s'annule pas (et f'' peut donc a priori s'annuler).

Exemple 18. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x + \ln x$. On admet que f est bijective. Montrer que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

5 Fonctions complexes

La définition de la dérivabilité d'une fonction complexe est une adaptation naturelle de la notion pour les fonctions réelles :

Définition 14.33

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite *finie* en a. On note alors

$$f'(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{C}$$

Cette limite est appelée nombre dérivé de f en a. Si f est dérivable en tout point $a \in I$, on définit alors sa (fonction) dérivée $f' : I \to \mathbb{C}$.

On peut définir de même les ensembles $\mathscr{D}^n(I,\mathbb{C})$, $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{C})$ et $\mathscr{C}^\infty(I,C)$.

Théorème 14.34

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et $f : I \to \mathbb{C}$.
La fonction f est dans $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{C})$ si et seulement si $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont dans $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$. De plus, si $n \neq +\infty$, on a

$$f^{(n)} = (\mathrm{Re} f)^{(n)} + i\,(\mathrm{Im} f)^{(n)}$$

Ce qui ne change pas dans le cadre $f : I \to \mathbb{C}$

- Opérations sur les dérivées et les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ et/ou $\mathscr{C}^\infty$: combinaisons linéaires, produit (formule de Leibniz), quotient. Pour la composition $g \circ f$, le cadre est $f : I \to \boxed{\mathbb{R}}$ et $g : J \to \mathbb{C}$ pour que $f(I) \subset J$.
- Dérivées à gauche, à droite en a.

Ce qui change dans le cadre $f : I \to \mathbb{C}$

- Les notions de maximum, minimum de f n'ont pas de sens car il n'y a pas d'inégalités sur $\mathbb{C}$.
- Rolle et le TAF sont faux : par exemple si $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ est définie par $f(t) = e^{it}$, alors f est continue sur $[0,2\pi]$, dérivable sur $]0,2\pi[$, et $f(0) = f(2\pi) = 0$ mais f' ne s'annule pas sur $]0,2\pi[$. En effet

$$|f'(t)| = |ie^{it}| = 1 \neq 0$$

- L'IAF par contre demeure vrai, les valeurs absolues sont traitées comme des modules :

Théorème 14.35 – IAF complexe

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. S'il existe $K \geq 0$ tel que pour tout $x \in \mathring{I}$, on a $|f'(x)| \leq K$, alors

$$\forall x, y \in I \qquad |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$$

Exemple 19. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\left|e^{ix} - e^{iy}\right| \leq |x - y|$.

En particulier, l'IAF permet de généraliser le résultat selon lequel une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante :

Théorème 14.36

On rappelle que I est un $\boxed{\text{intervalle}}$. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.

f est constante (sur I) si et seulement si $f' = 0$ sur $\mathring{I}$

6 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$, on peut :

- Utiliser les opérations usuelles sur les fonctions dérivables :
  - La somme / produit / ... de fonctions dérivables en a est dérivable en a.
  - Si $f = g \circ h$ avec h dérivable en a et g dérivable en $h(a)$, alors f est dérivable en a.
- Chercher si $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a.
- Si f est continue en a et si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$, on peut chercher si f' admet une limite en a.
- Chercher si f admet un DL à l'ordre 1 en a.

Le premier point ci-dessus permet aussi de montrer facilement que f est dérivable (voire de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur I.

Méthode

Pour calculer une dérivée n-ième, on peut :

- Calculer les premières dérivées successives, conjecturer une formule, et la montrer par récurrence.
- Si la fonction s'écrit comme un produit, utiliser la formule de Leibniz.
- Transformer l'expression pour faciliter les dérivations successives.