Chapitre 13

Limite, continuité

Plan du chapitre

Hypothèse

- I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ non triviaux.
- $\overline{I}$ est l'ensemble qui contient I ainsi que les extrémités de I, idem pour $\overline{J}$.
- $\mathring{I}$ est l'ensemble qui contient I privé des extrémités de I.

Dans ce chapitre, si $\pm\infty$ est une borne de l'intervalle I, on inclura $+\infty$ (resp. $-\infty$) dans $\overline{I}$.

Exemple 1. Si $I = \left]0,2\right]$, alors $\overline{I} =$ .... et $\mathring{I} =$ .... Si $I = \left[1,+\infty\right[$, alors $\overline{I} =$ .... et $\mathring{I} =$ ....

Enfin, dans ce chapitre, on commet l'abus suivant : si $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que a est fini si $a \in \mathbb{R}$. Sinon, a est dit infini.

1 Définition de limite d'une fonction

1.1 Notion de voisinage

Rappel : soit $\mathfrak{P}$ une propriété susceptible d'être vérifiée ou non par une fonction. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $J \subset I$. On dit que f vérifie $\mathfrak{P}$ sur J si la restriction $f|_J$ vérifie la propriété $\mathfrak{P}$.

Par exemple $\mathfrak{P}$ peut être "f est croissante" ou "f est positive". Cependant, on fait une exception pour "f est continue / dérivable sur J" qui signifie "f est continue / dérivable en chaque point de J".

Exemple 2. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$, mais pas sur $\mathbb{R}^*$.
La fonction $x \mapsto \ln x$ est bornée sur $\left[1,2\right]$ mais pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 13.1 – Voisinage (HP)

Soit $V \subset \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- ($a = +\infty$) On dit que V est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $V = \left[M, +\infty\right[$.
- ($a = -\infty$) On dit que V est un voisinage de $-\infty$ s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $V = \left]-\infty, M\right]$.
- (a fini) On dit que V est un voisinage de a s'il existe $\eta > 0$ tel que $V = \left[a-\eta, a+\eta\right]$.

Pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on notera $\mathcal{V}_a$ l'ensemble qui contient tous les voisinages de a.

Exemple 3.

$$\mathbb{R}_+ \in \mathcal{V}_{\dots\dots} \qquad\qquad V \in \mathcal{V}_{+\infty} \iff \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left[0,1\right] \in \mathcal{V}_{\dots\dots} \qquad\qquad U \in \mathcal{V}_{2} \iff \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Remarque. La notion de voisinage n'est pas au programme de MPSI. Elle est introduite ici pour simplifier considérablement certains énoncés et vous donner un peu de recul sur la notion de limite. Par ailleurs, la véritable définition est plus complexe : par exemple $V \in \mathcal{V}_\pi$ signifie en fait $\exists \eta > 0 \quad \left[\pi-\eta, \pi+\eta\right] \subset V$ (et non $=$). Ainsi, $\mathbb{R}_+$ ou encore $\left[-7,5\right]$ sont aussi des voisinages de π. Toutefois cette distinction ne sera pas nécessaire en pratique.

Définition 13.2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \bar{I}$.

On dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de a s'il existe $V \in \mathcal{V}_a$ tel que f vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap V$. De manière équivalente :

- ($a = +\infty$) f vérifie $\mathcal{P}$ au voisinage de $+\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap \left[A, +\infty\right[$.
- ($a = -\infty$) f vérifie $\mathcal{P}$ au voisinage de $-\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap \left]-\infty, A\right]$.
- (a fini) f vérifie $\mathcal{P}$ au voisinage de a s'il existe $\delta > 0$ tel que f vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap \left[a-\delta, a+\delta\right]$.

Remarque. La définition ci-dessus est au programme !

Exemple 4. Montrer les assertions suivantes :

1. ln est positive au voisinage de $+\infty$.
2. Pour tout $a \in \left]1, +\infty\right[$, ln est strictement positive au voisinage de a.
3. cos n'est pas croissante au voisinage de $+\infty$.

1. La fonction ln est définie sur $I = \mathbb{R}_+^*$. Alors, en posant par exemple $A = 2$,
$$I \cap \left[A, +\infty\right[= \left[2, +\infty\right[$$
et pour tout $x \geq 2$, on a bien $\ln x \geq \ln 2 \geq 0$. Donc ln est positive au voisinage de $+\infty$.

1.2 Définition de limite

Grâce aux voisinages, on peut écrire la définition de limite en une fois, au lieu de considérer neuf cas (!). Cependant, cette formulation avec les voisinages est hors-programme en MPSI.

Cette partie est laissée vide intentionnellement.

Définition 13.3 – Limite finie ou infinie, en un point de $\overline{I}$ (HP)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a si

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell \quad \exists U \in \mathcal{V}_a \quad \forall x \in I \qquad (x \in U \implies f(x) \in V)$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, ou bien $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, ou encore $\lim\limits_{a} f = \ell$.

On dit parfois aussi "f tend vers ℓ en a". L'interprétation est que $f(x)$ peut être aussi "proche" de ℓ que l'on souhaite (i.e. dans un voisinage V de ℓ aussi petit que l'on souhaite) à condition que x soit suffisamment "proche" de a (i.e. dans un voisinage U de a suffisamment petit).
Cette définition se décline en différentes formes selon que a ou ℓ soit fini ou infini.

1.3 Limite ℓ finie en a fini

On s'intéresse ici à une réécriture de la Définition 13.3 lorsque a et ℓ sont finis.

- Comme ℓ est fini, un voisinage V de ℓ est forcément de la forme $\left[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon\right]$ avec $\varepsilon > 0$. Ainsi :

$$\begin{cases} \text{“}\forall V \in \mathcal{V}_\ell\text{”} \quad \text{peut se réécrire} \quad \text{“}\forall \varepsilon > 0\text{”} \\ \text{“}f(x) \in V\text{”} \quad \text{peut se réécrire} \quad \text{“}|f(x)-\ell| \leq \varepsilon\text{”} \end{cases}$$

- Comme a est fini, un voisinage U de a est forcément de la forme $\left[a-\delta, a+\delta\right]$ avec $\delta > 0$. Ainsi :

$$\begin{cases} \text{“}\exists U \in \mathcal{V}_a\text{”} \quad \text{peut se réécrire} \quad \text{“}\exists \delta > 0\text{”} \\ \text{“}x \in U\text{”} \quad \text{peut se réécrire} \quad \text{“}|x-a| \leq \delta\text{”} \end{cases}$$

On obtient ainsi la définition suivante :

Définition 13.4 – Limite ℓ finie en a fini (version officielle)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{I}$ avec a fini, et $\ell \in \mathbb{R}$ (donc ℓ est fini). On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si :

Exemple 5. Montrer que $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 1]{} 1$.

1.4 Limite ℓ finie en a infini

On s'intéresse ici à une réécriture de la Définition 13.3 lorsque ℓ est fini et a est infini (donc $a = \pm\infty$). Reprenons la définition de $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$:

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell \quad \exists U \in \mathcal{V}_a \quad \forall x \in I \qquad (x \in U \implies f(x) \in V)$$

Commençons par le cas $a = +\infty$ (et ℓ fini) :

- Comme ℓ est fini, un voisinage V de ℓ est forcément de la forme $\left[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon\right]$ avec $\varepsilon > 0$. Ainsi :

$$\begin{cases} \text{“}\forall V \in \mathcal{V}_\ell\text{”} \quad \text{peut se réécrire} \quad \text{“}\forall \varepsilon > 0\text{”} \\ \text{“}f(x) \in V\text{”} \quad \text{peut se réécrire} \quad \text{“}|f(x) - \ell| \leq \varepsilon\text{”} \end{cases}$$

- Comme $a = +\infty$, un voisinage U de a est forcément de la forme $\left[A, +\infty\right[$ avec $A > 0$. Ainsi :

$$\begin{cases} \text{“}\exists U \in \mathcal{V}_a\text{”} \quad \text{peut se réécrire} \quad \text{“}\exists A > 0\text{”} \\ \text{“}x \in U\text{”} \quad \text{peut se réécrire} \quad \text{“}x \geq A\text{”} \end{cases}$$

On obtient la définition suivante :

Définition 13.5 – Limite ℓ finie en a infini (version officielle)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R}$ (donc ℓ est fini).

- (Cas $a = +\infty$) Si $+\infty \in \bar{I}$, on dit que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ si :

- (Cas $a = -\infty$) Si $-\infty \in \bar{I}$, on dit que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ell$ si :

Exemple 6. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$.

Remarque. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Que a soit fini ou infini, on a :

- $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, la propriété $\mathfrak{P}_\varepsilon : |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ est vraie au voisinage de a.
- $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si et seulement si $|f(x) - \ell| \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Théorème 13.6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration. On fait la preuve uniquement lorsque a est fini.

□

1.5 Limite ℓ infinie

On s'intéresse ici à une réécriture de la Définition 13.3 lorsque ℓ est infini. Reprenons la définition de $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$:

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell \quad \exists U \in \mathcal{V}_a \quad \forall x \in I \qquad (x \in U \implies f(x) \in V)$$

Commençons par le cas $\ell = -\infty$ et a est fini.

- Comme $\ell = -\infty$, un voisinage V de ℓ est forcément de la forme .... avec B........ . Ainsi :

$$\begin{cases} \text{“}\forall V \in \mathcal{V}_\ell\text{”} & \text{peut se réécrire} \quad \text{...........} \\ \text{“}f(x) \in V\text{”} & \text{peut se réécrire} \quad \text{..........} \end{cases}$$

- Comme a est fini, un voisinage U de a est forcément de la forme .... avec .... Ainsi :

$$\begin{cases} \text{“}\exists U \in \mathcal{V}_a\text{”} & \text{peut se réécrire} \quad \text{...........} \\ \text{“}x \in U\text{”} & \text{peut se réécrire} \quad \text{...........} \end{cases}$$

Définition 13.7 – Limite infinie (version officielle)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \bar{I}$.

- (a fini) Lorsque a est fini, on a $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ si :

- ($a = +\infty$) On a $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} -\infty$ si :

- ($a = +\infty$) On a $f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} -\infty$ si :

Ces énoncés s'adaptent également lorsque la limite vaut $+\infty$. Par exemple, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ équivaut à

On remarquera que dans l'énoncé ci-dessus, on peut remplacer "$\forall B \in \mathbb{R}$" par "$\forall B \geq 0$" sans changer la valeur de vérité de cette proposition. De même, on peut remplacer "$\exists A \in \mathbb{R}$" par "$\exists A \leq 0$".

Exemple 7. Montrer que $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$.

Exemple 8. Montrer que $\ln(1+x) \xrightarrow[x\to -1]{} -\infty$.

Remarque. Pour tout $a \in \bar{I}$, on a :

- $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ si et seulement si, pour tout $B \in \mathbb{R}$, la propriété $\mathfrak{P}_B : f(x) \geq A$ est vraie au voisinage de a.
- Si f a une limite infinie en a, alors f n'est pas bornée au voisinage de a.

1.6 Unicité de la limite

Théorème 13.8 – Unicité de la limite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \bar{I}$. Pour tous $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, si

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1 \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2$$

alors $\ell_1 = \ell_2$. Autrement dit **la** limite de f en a, si elle existe, est unique.

Cette proposition justifie, **lorsque la limite existe**, l'écriture “$\lim\limits_{x\to a} f(x)$” : cela ne correspond qu'à une seule et unique valeur (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

Démonstration. On ne fait la preuve que pour le cas $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ et a fini.

$\square$

2 Propriété des limites

2.1 Caractérisation séquentielle

Théorème 13.9 – Caractérisation séquentielle de la limite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

(ii) Pour toute suite (x_n) à valeurs dans I, si $x_n \to a$, alors $f(x_n) \to \ell$.

Démonstration. On ne fait la preuve que pour le cas où a et ℓ sont finis.
Montrons que *(ii)* implique *(i)*. Supposons par l'absurde que *(i)* soit fausse. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in I \qquad |x-a| \leq \delta \qquad \text{et} \qquad |f(x)-\ell| > \varepsilon$$

La valeur de ε étant fixée, pour chaque valeur $\delta = \dfrac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in I$ tel que

$$|x_n - a| \leq \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad |f(x_n)-\ell| > \varepsilon$$

On construit ainsi une suite (x_n) telle que $|x_n - a| \to 0$ mais $|f(x_n)-\ell| > \varepsilon$, donc $|f(x_n)-\ell|$ ne tend pas vers 0. Ainsi, la suite (x_n) tend vers a mais $(f(x_n))$ ne tend pas vers ℓ. Contradiction avec *(ii)*. Ainsi, *(i)* est vraie.

□

La caractérisation séquentielle est très utile pour montrer la *non-existence* d'une limite : il suffit de trouver deux suites $(x_n), (y_n)$ à valeurs dans I qui tendent vers a mais de sorte que les expressions $f(x_n)$ et $f(y_n)$ n'ont pas la même limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemple 9.

1. Montrer que cos n'admet pas de limite en $+\infty$.

Supposons par l'absurde que cos admette une limite, notée ℓ, en $+\infty$. Alors pour toute suite (x_n) telle que $x_n \to +\infty$, on a $\cos(x_n) \to \ell$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2n\pi \to +\infty \quad \text{et} \quad \cos(2n\pi) = 1 \to \ell$$

$$2n\pi + \pi \to +\infty \quad \text{et} \quad \cos(2n\pi + \pi) = -1 \to \ell$$

Ainsi, $1 = \ell = -1$. Contradiction. Ainsi, cos n'a pas de limite en $+\infty$.

2. Montrer que $f : x \mapsto \lfloor -x^2 \rfloor$ n'a pas de limite en 0.

2.2 Limites et inégalités

Les théorèmes pour les suites ont leur équivalent pour les fonctions. La différence principale étant que la mention “à partir d’un certain rang” est en quelque sorte remplacée par “au voisinage de a”, où a est le point en lequel on regarde la limite.

Passage à la limite

Théorème 13.10 – Passage à la limite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$. Si $f \leq g$ au voisinage de a, et si f, g admettent des limites (éventuellement infinies) en a, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

Remarque.

- Comme pour les suites, il est indispensable que f et g admettent des limites avant de passer à la limite.
- Attention, en passant à la limite les inégalités deviennent larges : si $f(x) < g(x)$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.
- Il n’est pas nécessaire que $f \leq g$ soit vrai partout : il suffit que cela soit vrai au voisinage de a :
  - si a est fini, il suffit que $f \leq g$ sur un ensemble de la forme $I \cap \left[a - \delta, a + \delta\right]$ avec $\delta > 0$.
  - Si $a = +\infty$, il suffit que $f \leq g$ sur un ensemble de la forme $I \cap \left[A, +\infty\right[$ avec $A \in \mathbb{R}$.
  - Si $a = -\infty$, il suffit que $f \leq g$ sur un ensemble de la forme $I \cap \left]-\infty, A\right]$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Résultats d’existences de limites

Théorème 13.11 – Théorème d’encadrement

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$f \leq g \leq h \qquad \text{au voisinage de } a$$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$, alors g admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.

Démonstration. On ne fait la démonstration que pour $a \in \mathbb{R}$ (donc fini).

$\square$

Comme pour les suites, le principal intérêt de ce théorème est de montrer que g admet une limite. Enfin, on dispose également d'un résultat d'encadrement "d'un seul côté" :

Théorème 13.12 – Encadrement d'un seul côté

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$. On suppose que $f \leq g$ au voisinage de a.

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Méthode – Limite par majoration

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ (donc fini). On souhaite montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. Si on trouve une fonction h telle que

$$\forall x \in I \qquad |f(x) - \ell| \leq h(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} h(x) = 0$$

alors $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

La preuve de cette méthode découle du théorème d'encadrement : on a en effet $0 \leq |f(x) - \ell| \leq h(x)$ et comme $h(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$, on en déduit que $|f(x) - \ell| \xrightarrow[x \to a]{} 0$, d'où le résultat.

Note : il n'est pas nécessaire de vérifier l'inégalité ci-dessus pour tout $x \in I$. Si U est un voisinage de a, il est suffisant de les vérifier pour tout $x \in I \cap U$. On peut ensuite passer à la limite et en déduire que $|f(x) - \ell| \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

2.3 Opérations sur les limites

On rappelle que les formes indéterminées sont :

$$+\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 1^{\infty} \qquad 0^0 \qquad \infty^0$$

Somme et produit

Théorème 13.13 – Somme et produit de limites

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{I}$. On suppose que

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$$

Alors, **à condition que cela ne donne pas une forme indéterminée**,

$$f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell+\ell'$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda \ell$$

$$f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\ell'$$

Démonstration. Montrons la propriété sur la limite de la somme et du produit dans le cas ℓ, ℓ' finis.

On va montrer que $\left|f(x)+g(x)-(\ell+\ell')\right| \xrightarrow[x\to a]{} 0$ par une majoration.

$$\left|f(x)+g(x)-\ell-\ell'\right| \leq |f(x)-\ell| + \left|g(x)-\ell'\right|$$

Or, $\lim\limits_{x\to a} |f(x)-\ell| = \lim\limits_{x\to a} \left|g(x)-\ell'\right| = 0$. On en déduit que $\left|f(x)+g(x)-\ell-\ell'\right| \xrightarrow[x\to a]{} 0$. D'où le résultat.

□

Théorème 13.14

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{I}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et g est bornée au voisinage de a. Alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Démonstration. Pour tout $x \in I$, on a

$$|f(x)g(x) - 0| \leq |f(x)| \times |g(x)| = |f(x) - 0| \times |g(x)|$$

Ensuite, de manière similaire à la preuve précédente, on considère un voisinage V de a sur lequel g est bornée. Comme $|f(x) - 0| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$, les mêmes arguments que la preuve précédente conduisent au résultat. □

Inverse et quotient

On peut montrer que si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, alors $f(x) \neq 0$ au voisinage de a. Donc la fonction $\dfrac{1}{f}$ est bien définie au voisinage de a.

Théorème 13.15 – Limite de l'inverse

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{I}$.

1. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$.
2. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.
3. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) > 0$ au voisinage de a, alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$. (car $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0^+$)
4. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) < 0$ au voisinage de a, alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$. (car $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0^-$)
5. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) \neq 0$ au voisinage de a, mais que les cas 3 et 4 ne sont pas vérifiés, alors $\dfrac{1}{f}$ n'a pas de limite en a.

Un quotient de fonctions peut se réécrire : $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$. On peut ainsi déduire la limite de $\dfrac{f}{g}$ avec les théorèmes de limites ci-dessus.

Composition

Théorème 13.16 – Composition de limites

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \overline{I}$ et $b \in \overline{J}$. On suppose $f(I) \subset J$, de sorte que $g \circ f$ a un sens. Alors,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{y \to b} g(y) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \implies \lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$$

Démonstration. Par la caractérisation séquentielle. □

3 Limite à gauche, limite à droite

On définit une nouvelle notion de limite, qui ne s'applique qu'en des points a finis.

Définition 13.17 – Limite à gauche, limite à droite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$ (donc a est fini).

- On suppose que $a \neq \inf I$, càd a n'est pas l'extrémité inférieure de I. Si la fonction
$$f\Big|_{I\cap\left]-\infty,a\right[}$$
admet une limite en a, on l'appelle la limite à gauche de f en a. On la note
$$\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) \qquad \text{ou} \qquad f(a^-)$$

- On suppose que $a \neq \sup I$, càd a n'est pas l'extrémité supérieure de I. Si la fonction
$$f\Big|_{I\cap\left]a,+\infty\right[}$$
admet une limite en a, on l'appelle la limite à droite de f en a. On la note
$$\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \text{ou} \qquad f(a^+)$$

Remarque (*Limite à droite sur le bord droit : impossible !*)**.** Si I est de la forme "$\cdots,a\right]$" ou "$\cdots,a,\left[$", alors f ne peut avoir de limite à droite en a : en effet $I\cap\left]a,+\infty\right[= \varnothing$ et cet ensemble ne vérifie pas les hypothèses pour qu'on puisse parler de limite (intervalle non trivial).

Remarque (*Limite à gauche sur le bord gauche : impossible !*)**.** La remarque précédente s'adapte également dans le cas où I est de la forme "$\left]a,\cdots\right.$" ou "$\left[a,\cdots\right.$" avec la limite à gauche de f en a.

Exemple 10.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$ (avec $I = \mathbb{R}_-^*$)
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$ (avec $I = \mathbb{R}_+^*$).
- La fonction ln n'admet pas de limite à gauche en 0
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\lfloor x\rfloor = \ldots$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\lfloor x\rfloor = \ldots$

Remarque (*Limite à droite sur le bord gauche*)**.** Lorsque I est de la forme "$\left]a,\cdots\right.$", on a $I\cap\left]a,+\infty\right[= I$ et donc la limite à droite de f en a coïncide avec la limite "habituelle". Par exemple

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x = \lim_{x\to 0}\ln x = -\infty$$

On peut donc omettre de préciser "$\displaystyle\lim_{x\to a^+}$" et juste mettre "$\displaystyle\lim_{x\to a}$". Par contre, si I est de la forme "$\left[a,\cdots\right.$", cela n'est plus vrai, par exemple :

$$f : x\in\mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0\\ 1 & \text{si } x > 0\end{cases} \qquad \text{vérifie } \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \qquad \text{mais n'a pas de limite en } 0$$

Remarque (*Limite à gauche sur le bord droit*)**.** La remarque précédente s'adapte également dans le cas où I est de la forme "$\cdots,a\left[\right.$" ou "$\cdots,a\right]$" avec la limite à gauche de f en a : par exemple

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x} = \lim_{x\to 1}\sqrt{1-x} = 0$$

Si on utilise les notations $f(a^+)$ et $f(a^-)$, il faut bien garder à l'esprit qu'il s'agit de limites. En particulier, il n'est pas nécessaire que f soit définie en a. On peut par exemple écrire $\ln(0^+) = -\infty$, bien que ln ne soit pas définie en 0.

Théorème 13.18

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$. Si f admet une limite (finie ou non) en a, alors

- elle admet une limite à gauche en a, à condition que a n'est pas le bord gauche de I
- elle admet une limite à droite en a, à condition que a n'est pas le bord droit de I
- toutes ces limites sont égales :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to a^+} f(x)}_{(\text{si } a \neq \sup I)} = \underbrace{\lim_{x\to a^-} f(x)}_{(\text{si } a \neq \inf I)}$$

La réciproque est fausse : une fonction peut admettre des limites à gauche et à droite en a qui sont égales sans pour autant que f admette une limite en a. Par exemple :

$$\lim_{x\to 0^+} \lfloor -x^2 \rfloor = \lim_{x\to 0^-} \lfloor -x^2 \rfloor = -1 \qquad \text{mais} \qquad x \mapsto \lfloor -x^2 \rfloor \quad \text{n'a pas de limite en zéro.}$$

cf exemple 9. Cela est dû au fait que pour admettre une limite en 0 (ou en tout $a \in \mathbb{R}$), il faut que la limite existe et soit unique quelle que soit la "façon" de tendre vers 0. Or, on peut trouver deux suites (x_n) et (y_n) qui tendent vers 0 et pour lesquelles $\lfloor x_n \rfloor$ et $\lfloor y_n \rfloor$ ont des limites différentes, cf exemple 9.

3.1 Théorème de la limite monotone (fonctions)

Théorème 13.19 – Théorème de la limite monotone

Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$. Soit $f : \left]a, b\right[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors

1. f admet des limites (éventuellement infinies) en a et b, càd les limites suivantes existent :

$$\lim_{x\to a} f(x) \qquad \lim_{x\to b} f(x)$$

2. Pour tout $c \in \left]a, b\right[$, f admet des limites ***finies*** à gauche et à droite en c. De plus,

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x\to c^+} f(x) \qquad \text{si } f \text{ est croissante}$$
$$\lim_{x\to c^-} f(x) \geq f(c) \geq \lim_{x\to c^+} f(x) \qquad \text{si } f \text{ est décroissante}$$

Démonstration. On ne fait la démonstration que dans le cas f croissante. Pour le premier point, on montre uniquement que $\lim_{x\to b} f(x)$ existe (l'autre moitié se montre en adaptant la preuve).
Montrons l'assertion 1. On pose $J = f\left(\left]a, b\right[\right)$.

- Supposons J non majoré. Montrons que $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$, càd

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \left]a,b\right[\qquad x \geq b - \delta \implies f(x) \geq B$$

  Soit $B \in \mathbb{R}$. J étant non majoré, il existe $y \in J$ tel que $y \geq B$. Or, par définition de J, il existe $x_0 \in \left]a,b\right[$ tel que $f(x_0) = y$. On pose $\delta = b - x_0 > 0$. Soit $x \in \left]a,b\right[$. On suppose $x \geq b - \delta$ donc $x \geq x_0$. Alors par croissance de f, on obtient :

$$f(x) \geq f(x_0) = y \geq B$$

  Ainsi, par arbitraire sur B, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.

□

4 Continuité en un point

La notion de continuité d'une fonction f en un point a se définit à partir de la notion de limite. Toutefois, il faut que a soit ***fini***, et d'autre part que f soit ***définie*** en a. Ainsi, pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, on ne peut parler de continuité qu'en un point $a \in I$.

4.1 Introduction

Définition 13.20 – Continuité en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- On dit que f est continue en a si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

  càd

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x-a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

- Sinon, on dit que f est discontinue en a.

Exemple 11. Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}$.

Théorème 13.21 – Admettre une limite en un point de I entraine la continuité en ce point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f admet une limite en $\boxed{a \in I}$, alors f est continue en a.

$\square$

Théorème 13.22 – Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est continue en a.
- Pour toute suite (x_n) à valeurs dans I, si $x_n \to a$, alors $f(x_n) \to f(a)$.

A nouveau, cette caractérisation permet surtout de montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.

Exemple 12. La fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en 0.

4.2 Continuité à droite, à gauche

Définition 13.23 – Continuité à gauche, à droite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathring{I}$.

- On dit que f est continue à gauche en a si la fonction
$$f\big|_{\left]-\infty,a\right]\cap I}$$
est continue en a, c'est-à-dire si
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$
- On dit que f est continue à droite en a si la fonction
$$f\big|_{I\cap\left[a,+\infty\right[}$$
est continue en a, c'est-à-dire si
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

Exemple 13. La fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en 0, mais pas à gauche.

Théorème 13.24

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overset{\circ}{I}$.
f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche ET à droite en a.

Contrairement aux limites, il est donc suffisant d'être continue à gauche et à droite en a pour être continue en a.

4.3 Continuité sur un intervalle

Définition 13.25

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue (sur I) si f est continue en tout point de I.
On note $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$, ou parfois juste $\mathscr{C}(I)$, l'ensemble des fonctions réelles continues sur I.

Remarque. Si $f \in \mathscr{C}(I)$, et si $J \subset I$, alors $f \in \mathscr{C}(J)$.

Par abus de langage, pour une partie $X \subset \mathbb{R}$ quelconque on dit parfois que f est continue (sur X) si f est continue en chaque point de X.

Exemple 14. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple 15. La fonction tan est continue sur $D_{tan} = \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

Exemple 16. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

n'est pas continue (sur $\mathbb{R}$) car elle n'est pas continue en 0. En particulier, elle n'est continue ni sur $\mathbb{R}_-$, ni sur $\mathbb{R}_+$. Cependant (et c'est subtil), la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est continue (sur $\mathbb{R}_+$), car $f|_{\mathbb{R}_+}$ est la fonction constante égale à 1. La définition 13.2 ne s'applique donc pas à la notion de continuité[1]

4.4 Opérations et continuité

Théorème 13.26 – Somme, produit, inverse et continuité

Soit $a \in I$. La somme, la différence, la multiplication par un réel λ, le produit, le quotient (à condition qu'il soit défini) de fonctions continues en a (resp. sur I) est encore une fonction continue en a (resp. sur I).

Théorème 13.27 – Composition et continuité

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose $f(I) \subset J$, de sorte que $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ ait un sens. Si :

1. f est continue en a (resp. sur I).
2. g est continue en $f(a)$ (resp. sur J).

Alors $g \circ f$ est continue en a (resp. sur I).

Exemple 17. Si f est continue, alors $e^{\arctan f}$, $|f|$ et f^2 sont continues.

1. Ceci est le résultat d'un choix de convention. Certains auteurs prennent la convention inverse et affirment que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $f|_{\mathbb{R}_+}$ l'est, bien que f elle-même ne soit pas continue en 0... En revanche, il y a consensus pour dire que $f|_{\mathbb{R}_+}$ est continue.

5 Prolongement par continuité

5.1 Définition d'un prolongement

Dans cette section, on va supposer que $a \in I$ et considérer une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$. L'objectif de cette section est de savoir sous quelles conditions on peut prolonger par continuité une fonction, cf définition ci-dessous.

Définition 13.28 – Prolongement par continuité

Soit $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction continue (sur $I \setminus \{a\}$). On dit que f est prolongeable par continuité en a s'il existe une application $\widetilde{f}$ définie et **continue** sur I qui prolonge f.

La fonction $\widetilde{f}$ est appelée prolongement par continuité de f en a.

Autrement dit, cela veut dire qu'il existe $y_a \in \mathbb{R}$ tel que l'application suivante soit **continue** :

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : & I \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ y_a & \text{si } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

Il arrive fréquemment qu'on note également f l'application $\widetilde{f}$.

Exemple 18. La fonction $f : x \mapsto x \ln x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut la prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) := 1$: on vérifie bien la continuité en 0 car $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Exemple 19. Cependant, on "voit" que la fonction "signe" $f : x \mapsto \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ ne peut pas être prolongée par continuité en 0. Aucune valeur y_0 qu'on utiliserait pour définir $f(0)$ ne permet de rendre f continue sur $\mathbb{R}$.

5.2 Théorème de prolongement

Théorème 13.29 – Prolongement par continuité

Soit $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction. f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet en a une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, ce prolongement est unique et correspond à l'application

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : & I \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, pour prolonger une fonction continue f en un point a, il suffit de déterminer la limite $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Cependant, selon que a soit au bord de I ou au contraire dans $\mathring{I}$, le calcul de limite sera légèrement différent :

Prolongement en un “bord” – a est une extrémité de I.

Ce cas est particulièrement simple car en étant astreint à $I \setminus \{a\}$, il n'y a qu'une seule “manière” de tendre vers a : par une limite à gauche (si $a = \sup I$) ou à droite (si $a = \inf I$). Par exemple, on pose

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^x \end{aligned}$$

et on cherche un éventuel prolongement par continuité de g en 0. Cette situation correspond à $I = \mathbb{R}_+$ et $a = 0$, de sorte que $I \setminus \{a\} = \mathbb{R}_+^*$. Il suffit donc de regarder si g admet une limite (à droite) en 0.

Exemple 20. Montrer que la fonction g ci-dessus est prolongeable par continuité en 0.

Prolongement en un “trou” – a est un point de $\mathring{I}$.

Ce cas est un peu plus compliqué car en étant astreint à $I \setminus \{a\}$ il y a deux “directions” pour tendre vers a. La proposition suivante montre qu'il suffit de vérifier les limites à gauche et à droite en a pour conclure.

Théorème 13.30

Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathring{I}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- La fonction f admet une limite en a
- f admet une limite à gauche et à droite en a, et $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

De plus, lorsque ces assertions sont vérifiées, toutes ces limites sont égales :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Attention à ne pas confondre le Théorème ci-dessus avec le Théorème 13.18 ! Dans le Théorème ci-dessus, f n'est pas définie en a. C'est uniquement dans ce cadre qu'admettre des limites égales en a^- et en a^+ entraine que la limite en a existe.

Dans certains cas, on peut cependant se passer d'utiliser le théorème ci-dessus. On pose

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

Exemple 21. Montrer que la fonction h ci-dessus est prolongeable par continuité en 0.

6 Les grands théorèmes sur la continuité

6.1 Le TVI et ses conséquences

Théorème 13.31 – TVI : Théorème des Valeurs Intermédiaires

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $\left[a,b\right]$ (avec $a<b$). Toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ admettent (au moins) un antécédent par f dans $\left[a,b\right]$.

Autrement dit, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in \left[a,b\right]$ tel que $y=f(x)$.

□

Corollaire 13.32 – Corollaire du TVI

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors f est injective.

Autrement dit, si f vérifie les hypothèses, pour tous $a,b \in I$ avec $a<b$, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe *un unique* $x \in \left[a,b\right]$ tel que $y=f(x)$.

Démonstration. Admise (non exigible). □

Exemple 22. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel positif x_n tel que $x_n^4 + 4x_n - n = 0$.

Corollaire 13.33

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Corollaire 13.34

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas sur I, alors f a le même signe (strict) sur I.

6.2 Théorème des bornes atteintes et ses conséquences

On rappelle que *lorsque cela a un sens*, on note :

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) := \max\left\{f(x) \mid x \in [a,b]\right\} \qquad \min_{x \in [a,b]} f(x) := \min\left\{f(x) \mid x \in [a,b]\right\}$$

Définition 13.35

On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ atteint ses bornes lorsque les notations ci-dessus ont un sens. Ainsi, il existe $c, d \in [a,b]$ tels que $\quad f(c) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x) \quad$ et $\quad f(d) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

Théorème 13.36 – Théorème des bornes atteintes

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

□

Corollaire 13.37

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors l'image par f du segment $[a,b]$ est un segment :

$$f\left([a,b]\right) = [m,M] \qquad \text{avec} \qquad m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Démonstration. Par définition, $m = \min f\left([a,b]\right)$ et $M = \max f\left([a,b]\right)$. Donc tout élément $y \in f\left([a,b]\right)$ vérifie $m \leq y \leq M$ de sorte que $f\left([a,b]\right) \subset [m,M]$.
Ensuite, comme $f\left([a,b]\right)$ est un intervalle et que $m, M \in f\left([a,b]\right)$, on en déduit par définition d'un intervalle que $[m,M] \subset f\left([a,b]\right)$. Finalement, $f\left([a,b]\right) = [m,M]$. □

6.3 Théorème de la bijection monotone

Théorème 13.38

Soit f une fonction continue sur I. Alors f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

Démonstration. Admise (non exigible). □

Théorème 13.39 – Théorème de la bijection monotone

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors :

1. $f(I)$ est un intervalle.
2. f réalise une bijection de I sur $f(I)$
3. $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et a la même monotonie (stricte) que f.

Démonstration. Admise (non exigible). On notera que le premier point s'obtient par le corollaire 13.33, et le second du corollaire 13.32 ajouté au fait que $f : I \to f(I)$ est nécessairement surjective. □

7 Fonctions complexes

La notion de limite s'étend facilement aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$. Il suffit de remplacer la valeur absolue par le module. Avantage des fonctions complexe : la notion de limite infinie n'a pas de sens ! Donc il suffit de définir la notion de limite finie (i.e. dans $\mathbb{C}$).

Définition 13.40 – Limite (finie) d'une fonction complexe

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a si $|f(x) - \ell| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$:

- Si a est fini :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad (|x - a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$
- Si $a = +\infty$:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad (x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$
- Si $a = -\infty$:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad (x \leq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

On note à nouveau $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Définition 13.41 – Continuité

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On suppose que $a \in I$. On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
On dit que f est continue sur I si f est continue en chaque point de I.

Remarque. Topo rapide sur ce qui est conservé (ou pas) avec des fonctions complexes :

- L'unicité de la limite (finie) est là encore garantie.
- Attention : il n'y a pas de notion de limite infinie : une fonction complexe ne peut pas "tendre vers $\pm\infty$".
- Les caractérisations séquentielles (limite et continuité) sont valables, avec le même énoncé.
- Les sommes, produits, inverses et quotients sur les limites et la continuité restent vraies. Pour la composée $g \circ f$, les hypothèses sont $f : I \to \boxed{\mathbb{R}}$ et $g : J \to \mathbb{C}$ avec J un intervalle de $\boxed{\mathbb{R}}$. La fonction f est donc réelle, seule g est une fonction complexe.

Théorème 13.42

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction.

- f admet une limite (finie) en a si et seulement si $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ admettent des limites finies en a, et dans ce cas
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \mathrm{Re}(f(x)) + i \lim_{x \to a} \mathrm{Im}(f(x))$$
- f est continue en a (resp. sur I) si et seulement si $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont continues en a (resp. sur I).