Chapitre 12

Suites réelles et complexes

Plan du chapitre

1 Généralités sur les suites 1
- 1.1 Introduction 1
- 1.2 Opérations sur les suites 2
- 1.3 Majorations, minorations 2
- 1.4 Sens de variation 3

2 Limite d'une suite 4
- 2.1 Limite finie – suite convergente 4
- 2.2 Limite infinie 7
- 2.3 Opérations sur les limites 8
- 2.4 Limites et inégalités 10

3 Sens de variation et limites 11
- 3.1 Suites monotones 11
- 3.2 Suites adjacentes 12

4 Extraction de suites 13
- 4.1 Suites extraites 13
- 4.2 Le théorème de Bolzano-Weierstrass 14

5 Compléments 17
- 5.1 Suites complexes 17
- 5.2 Limite de $f(u_n)$, caractérisations de la densité et du "sup" 20

6 Suites particulières 20
- 6.1 Suites récurrente linéaire d'ordre 1 20
- 6.2 Suites récurrente linéaire d'ordre 2 21
- 6.3 Suites récurrentes d'ordre 1, cas général 23

7 Méthodes pour les exercices. 26

1 Généralités sur les suites

1.1 Introduction

Définition 12.1

On appelle suite réelle toute application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Elle est généralement notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).

Le réel u_n est appelée le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque. On peut aussi définir des suites $u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, ou plus généralement des suites $u : [\![n_0, +\infty[\![\to \mathbb{R}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$. On notera alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ une telle suite.

On peut définir une suite réelle de plusieurs façons :

- *Explicite* : $(n^2-1)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$
- *Par récurrence* : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1}+u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}\end{cases}$
- *Implicite* : pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note x_n l'unique solution de l'équation $\ln x + x = n$. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque (Suites bien définies)**.** Pour qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie, il faut s'assurer que pour chaque valeur de n, l'expression de u_n a un sens et est unique. Voici des suites ***mal définies*** :

$(\ln n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\qquad$ $\begin{cases} u_0 = \dfrac{\pi}{2} \\ u_{n+1} = \tan(u_n) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}\end{cases}$ $\qquad$ x_n est l'unique solution de $x^2 = 1-n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1.2 Opérations sur les suites

Définition 12.2

Étant donné deux suites réelles $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel λ, on définit

- Les suites $u+v$, $u-v$, uv et λu de termes généraux respectifs u_n+v_n, u_n-v_n, u_nv_n et λu_n.
- Si la suite (v_n) ne s'annule pas, les suites $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ de termes généraux $\dfrac{1}{v_n}$ et $\dfrac{u_n}{v_n}$.
- Enfin, on dit que $u\leq v$ si $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n\leq v_n$

1.3 Majorations, minorations

Définition 12.3

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une propriété $\mathfrak{P}$ à partir d'un certain rang lorsqu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que la suite $(u_n)_{n\geq N}$ vérifie la propriété $\mathfrak{P}$.

Définition 12.4

Une suite $u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite...

1. majorée si $\exists M\in\mathbb{R} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad u_n\leq M$
2. minorée si $\exists m\in\mathbb{R} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad u_n\geq m$
3. bornée si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois majorée et minorée.
4. positive si $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n\geq 0$
5. négative si $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n\leq 0$
6. constante si $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}=u_n$ ou encore $\exists C\in\mathbb{R} \quad \forall n\in\mathbb{N} \qquad u_n=C$
7. stationnaire si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang, càd si

$$\exists C\in\mathbb{R} \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n\geq N \qquad u_n=C$$

Exemple 1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$ est stationnaire mais pas constante.

Exemple 2. La suite de terme général $(-1)^n$ est bornée mais pas stationnaire.

Théorème 12.5

Pour toute suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } &\iff (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée} \\ &\iff \ldots \end{aligned}$$

Remarque. On peut remplacer le “$\exists K \in \mathbb{R}$” par “$\exists K \geq 0$” ou même “$\exists K \geq 100$” : si la proposition est vraie pour une valeur K_0, alors elle l’est aussi pour la valeur $K_0 + 100$.

1.4 Sens de variation

Définition 12.6 – Sens de variation

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite...

1. croissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n$
2. décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$
3. monotone si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ou décroissante.
4. strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} > u_n$
5. strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$
6. strictement monotone si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante ou strictement décroissante.

Il arrive que ces propriétés ne soient vérifiées qu’à partir d’un certain rang. Toute suite croissante et décroissante est une suite constante et vice versa.

Méthode – Étudier la monotonie

Étant donné une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si on a une définition explicite $u_n = F(n)$, on peut étudier la monotonie de F sur $\mathbb{R}_+$ (qui contient $\mathbb{N}$) pour en déduire celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Enfin, il y a aussi des variantes “décroissantes” et/ou “strictes” : si $u_{n+1} - u_n < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante, etc.

Exemple 3. Étudier la monotonie de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exemple 4. Étudier la monotonie de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$.

Quelques résultats évidents :

- Par récurrence immédiate, si (u_n) est croissante, alors pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$, on a $u_p \leq u_q$.
- Si u est une suite croissante, $-u$ est décroissante.
- Si u, v sont des suites croissantes, alors $u + v$ aussi.
- Si u, v sont des suites croissantes *positives*, alors uv aussi.

2 Limite d'une suite

2.1 Limite finie – suite convergente

Définition 12.7

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Étant donné $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ ou converge vers ℓ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

   Un tel réel ℓ est alors appelé limite de la suite u, on note

$$\lim u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \to \ell$$

2. On dit que (u_n) est convergente lorsque : $\quad \exists \ell \in \mathbb{R} \qquad u_n \to \ell$
3. On dit que (u_n) est divergente lorsque (u_n) n'est pas convergente.

Attention ! Pour que la suite (u_n) soit **convergente**, il faut qu'elle admette une **limite finie**.

Pour noter la convergence vers une limite ℓ, s'il y a un risque de confusion, on peut aussi employer la notation plus précise $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dots$

On notera que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon \iff u_n \in \left[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon\right]$. Cela justifie la remarque suivante :

Remarque (Interprétation de $u_n \to \ell$)**.** $u_n \to \ell$ signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $u_n \in \left[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon\right]$ à partir d'un certain rang N (qui dépend de ε). Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang, la suite se retrouve "coincée" dans la bande horizontale $\left[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon\right]$. C'est cela, la convergence vers ℓ !

Théorème 12.8 – Unicité de la limite (finie)

Soit $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $\quad u_n \to \ell_1 \quad$ et $\quad u_n \to \ell_2 \quad$ alors $\quad \ell_1 = \ell_2$.
Autrement dit, *la* limite de la suite (u_n) est unique.

$\square$

Théorème 12.9

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$u_n \to \ell \iff u_n - \ell \to 0 \iff |u_n - \ell| \to 0$$

Méthode

Pour montrer que u_n tend vers une valeur ℓ (qu'on a réussi à deviner), on peut majorer $|u_n - \ell|$ par une expression v_n telle que

$$|u_n - \ell| \leq v_n \qquad v_n \to 0$$

Exemple 5. Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!$ converge vers 1.

Théorème 12.10

Pour tous $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, si $u_n \to \ell$, alors $|u_n| \to |\ell|$.

Démonstration. Comme $u_n \to \ell$, on a $|u_n - \ell| \to 0$. De plus, par la seconde inégalité triangulaire :

$$\Big| |u_n| - |\ell| \Big| \leq |u_n - \ell| \to 0$$

donc $|u_n| \to |\ell|$. □

Théorème 12.11

Toute suite convergente est bornée.

□

Toute suite stationnaire est convergente. La réciproque est fausse : $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0 sans être stationnaire.

2.2 Limite infinie

Définition 12.12 – Limites infinies

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ lorsque, pour tout réel A, la suite u est majorée par A à partir d'un certain rang :
$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad u_n \leq A$$
On note alors $\lim u_n = -\infty$ ou encore $u_n \to -\infty$.
2. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque, pour tout réel A, la suite u est minorée par B à partir d'un certain rang :
$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad u_n \geq B$$
On note alors $\lim u_n = +\infty$ ou encore $u_n \to +\infty$.

Exemple 6. Vérifier avec la définition que la suite de terme général $u_n = n$ tend vers $+\infty$.

Remarque (Nature d'une suite)**.** Quand on demande la nature d'une suite, on entend par là prouver si elle est convergente ou divergente. Trois cas sont possibles :

- La suite (u_n) tend vers une limite finie, càd est *convergente*.
- Sinon, la suite (u_n) est *divergente* :
  - Ou bien (u_n) a une limite infinie.
  - Ou bien (u_n) n'a pas de limite, par exemple $u_n = (-1)^n$ ou $u_n = (-2)^n$.

Exemple 7 (**Essentiel**)**.** Soit $q \in \mathbb{R}$. Donner la nature de la suite (q^n).

Théorème 12.13 – Unicité de la limite (finie ou non)

Si une suite admet une limite (finie ou infinie), cette limite est unique.

2.3 Opérations sur les limites

Rappel : les formes indéterminées avec les limites sont :

$$+\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$0^0 \qquad 1^\infty \qquad \infty^0$$

De plus, les trois dernières se déduisent des premières en utilisant la forme $a^b = e^{b \ln a}$. Par exemple si a_n et b_n tendent vers 0^+, on ne peut rien dire de $a_n^{b_n}$ car $a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$; $b_n \to 0$; $\ln a_n \to -\infty$ donc $b_n \ln a_n$ donne une forme indéterminée $0 \times (-\infty)$.

Somme et produit

Théorème 12.14 – Limite de la somme et du produit

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites telles que

$$u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad v_n \to \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$$

Alors, **à condition que cela ne donne pas une forme indéterminée**,

$$u_n + v_n \to \ell + \ell'$$

$$u_n v_n \to \ell\ell'$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda u_n \to \lambda \ell$$

Exemple 8. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{n - 3n^2}{n\sqrt{n} + 1}$.

Théorème 12.15

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $u_n \to 0$ et (v_n) est bornée, alors $u_n v_n \to 0$.

□

Inverse et quotient

On peut montrer que si
$$v_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$$
alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \neq 0$ si $n \geq N$. Ainsi, la suite $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)_{n \geq N}$ est bien définie.

Théorème 12.16 – Limite de l'inverse

Soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Si $v_n \to \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\dfrac{1}{v_n} \to \dfrac{1}{\ell}$.
2. Si $v_n \to \pm\infty$, alors $\dfrac{1}{v_n} \to 0$.
3. Si $v_n \to 0$ et $v_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{v_n} \to +\infty$ (car $v_n \to 0^+$).
4. Si $v_n \to 0$ et $v_n < 0$ à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{v_n} \to -\infty$ (car $v_n \to 0^-$).
5. Si $v_n \to 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, mais que les cas 3 et 4 ne sont pas vérifiés, alors $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ n'a pas de limite.

Exemple 9. La suite de terme général $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ vérifie $v_n \to 0$ mais $\dfrac{1}{v_n} = n(-1)^n$ n'a pas de limite.

Remarque (Limite du quotient)**.** Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v_n \to \ell' \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, alors à condition qu'on n'ait pas de forme indéterminée,
$$\frac{u_n}{v_n} \to \frac{\ell}{\ell'}$$
On a des résultats similaires si $v_n \to 0^+$ ou $v_n \to 0^-$, mais si on est en dehors de ces deux cas, on doit être très prudent, comme le montre l'exemple 9 (si on prend $u_n = 1$). Pour être sûr de ne pas se tromper, on peut aussi réécrire $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$ et appliquer les Théorèmes 12.14 et 12.16.

Exemple 10. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{n + \sin n}{3n - \cos n}$.

2.4 Limites et inégalités

Passage à la limite

Théorème 12.17 – Passage à la limite

Soit u, v deux suites **convergentes** vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\lim u_n > \lim v_n$. Alors $\lim(u_n - v_n) > 0$. Cela entraine que $u_n - v_n > 0$ à partir d'un certain rang, ce qui contredit l'hypothèse $u_n \leq v_n$. Donc $\lim u_n \leq \lim v_n$. □

Remarque. Une inégalité stricte $u_n < v_n$ devient une inégalité large en passant à la limite : $\lim u_n \leq \lim v_n$. Penser à $u_n = 0$ et $v_n = \frac{1}{n}$.

Remarque. Attention, pour passer à la limite dans $u_n \leq v_n$, il faut que $\lim u_n$ **et** $\lim v_n$ aient un sens !

Résultats d'existences de limites

Théorème 12.18 – Théorème d'encadrement

Soit u, w deux suites convergeant vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Soit v une suite telle que

$$u_n \leq v_n \leq w_n \qquad \text{à partir d'un certain rang}$$

alors (v_n) est convergente et $v_n \to \ell$.

□

Le principal intérêt de ce théorème est de montrer que (v_n) est convergente ! En effet, si on sait déjà que (v_n) est convergente, la Proposition 12.17 suffit pour conclure que $v_n \to \ell$.

Théorème 12.19 – Encadrement d'un seul côté

Soit u, v deux suites vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.
- Si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.

Démonstration. Évident d'après la définition d'une limite infinie. □

Ce résultat est lui aussi un théorème d'existence de limite. Attention au sens : si $u_n \leq v_n$ et que $\lim u_n = -\infty$, on ne peut rien dire sur (v_n) : a priori, on ne sait même pas si sa limite existe.

3 Sens de variation et limites

3.1 Suites monotones

Théorème 12.20 – Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) une suite croissante.

1. Si (u_n) est majorée, elle est convergente et $\lim u_n = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si (u_n) est non majorée, elle est divergente et $\lim u_n = +\infty$.

Soit (u_n) une suite décroissante.

1. Si (u_n) est minorée, elle est convergente et $\lim u_n = \inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si (u_n) est non minorée, elle est divergente et $\lim u_n = -\infty$.

Autrement dit, toute suite monotone admet une limite (éventuellement infinie).

$\square$

Exemple 11. Déterminer la nature de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Si (u_n) est une suite croissante et majorée par M, on sait que $\lim u_n \leq M$: il suffit d'appliquer le Théorème 12.17 avec $v_n = M$. En particulier, l'exemple ci-dessus montre que $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2$.

Enfin, si une suite croissante (u_n) tend vers ℓ, alors pour tout n on a $u_n \leq \ell$.

3.2 Suites adjacentes

Définition 12.21 – Suites adjacentes

Deux suites sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si leur différence tend vers 0.

Théorème 12.22 – Théorème des suites adjacentes

Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

□

Remarque. En reprenant les notations de la preuve, si $\ell = \lim u_n = \lim v_n$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leq \ell \leq v_n$$

et même

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \qquad u_p \leq \ell \leq v_q$$

Exemple 12. Étudier la nature des suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

4 Extraction de suites

4.1 Suites extraites

Définition 12.23 – Suite extraite

1. On appelle extractrice toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Une suite (v_n) est appelée suite extraite de (u_n) ou sous-suite de (u_n) s'il existe une extractrice φ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = u_{\varphi(n)}$$

Théorème 12.24

Si φ est une extractrice, on a $\varphi(n) \geq n$.

Exemple 13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.

- La suite (u_{2n}) est une suite extraite de (u_n), qui est constante égale à 1.
- La suite (u_{2n+1}) est une suite extraite de (u_n), qui est constante égale à -1.
- La suite $(v_n) = (u_{n+1})$ est une suite extraite de (u_n), et vérifie $v_n = (-1)^{n+1} = -u_n$.

Intuitivement, une suite extraite (v_n) s'obtient en "retirant" une partie des termes de la suite (u_n), ce qui décale les indices, de sorte que $v_n = u_{\varphi(n)} \neq u_n$ a priori.

Définition 12.25 – Valeur d'adhérence

On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence d'une suite (u_n) s'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ telle que $u_{\varphi(n)} \to \ell$.

Exemple 14. Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = (-1)^n$, alors 1 et -1 sont des valeurs d'adhérences car

$$u_{2n} = 1 \to 1 \qquad u_{2n+1} = -1 \to -1$$

Théorème 12.26

Soit (u_n) une suite qui tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ tend vers ℓ.

En particulier, si (u_n) admet deux valeurs d'adhérences distinctes, alors (u_n) n'a pas de limite.

Preuve de la deuxième assertion. Soit (u_n) une suite avec deux valeurs d'adhérences distinctes a_1 et a_2. Supposons par l'absurde que (u_n) admet une limite. Comme a_1 est une valeur d'adhérence, il existe une sous-suite $(u_{\varphi_1(n)})$ telle que $u_{\varphi_1(n)} \to a_1$. De même, il existe une sous-suite $(u_{\varphi_2(n)})$ telle que $u_{\varphi_2(n)} \to a_2$.
Or, (u_n) admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ par hypothèse, donc par la première assertion du théorème, toute suite extraite tend vers ℓ, donc en particulier $(u_{\varphi_1(n)})$ et $(u_{\varphi_2(n)})$. Par unicité de la limite, on a donc $a_1 = \ell = a_2$. Contradiction.
Donc (u_n) n'admet pas de limite. □

Méthode

Pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite, on peut notamment exhiber deux sous-suites qui tendent vers des valeurs distinctes.

Exemple 15. Montrer que la suite définie par $u_n = \cos(n\pi)$ diverge.

4.2 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 12.27

On appelle segment de $\mathbb{R}$ tout intervalle fermé borné, càd tout intervalle de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$.

Théorème 12.28 – Théorème des segments emboités

Soit $I_n = [a_n, b_n]$ une suite de segments tels que $I_{n+1} \subset I_n$. On suppose que la largeur $(b_n - a_n)$ de I_n vérifie $(b_n - a_n) \to 0$.
Alors l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

Démonstration. Comme $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, on a

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} \leq b_n$$

Ainsi, (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et $b_n - a_n \to 0$. Ce sont des suites adjacentes, et donc il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \to \ell$ et $b_n \to \ell$.
Comme ce sont des suites adjacentes, on a

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq \ell \leq b_n \\ \iff & \forall n \in \mathbb{N} \quad \ell \in I_n \\ \iff & \ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \end{aligned}$$

Ceci montre que $\{\ell\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Réciproquement, montrons que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset \{\ell\}$. Soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Grâce aux équivalences ci-dessus, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq x \leq b_n$$

et passant à la limite, on trouve $\ell \leq x \leq \ell$, donc $x = \ell$. Ainsi $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset \{\ell\}$. Finalement

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$$

□

Théorème 12.29 – Théorème de Bolzano–Weierestrass

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

□

Exemple 16. La suite $(\sin n)$ possède au moins une sous-suite convergente.

5 Compléments

5.1 Suites complexes

Généralités

Définition 12.30

On appelle suite complexe toute application $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note là encore $u_n := u(n)$.

On peut à nouveau définir la somme et le produit de suites complexes, cf Définition 12.2.

Cependant, comme la relation $\leq$ n'a pas de sens sur $\mathbb{C}$, les notions de suites majorées, minorées, et tout ce qui concerne le sens de variation n'a pas de sens pour les suites complexes. Cependant, la notion de suite bornée à un sens :

Définition 12.31

Une suite complexe (u_n) est dite bornée lorsque la suite réelle $(|u_n|)$ est majorée, càd

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n| \leq K$$

Théorème 12.32

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors (u_n) est bornée si et seulement si les suites $(\operatorname{Re} u_n)$ et $(\operatorname{Im} u_n)$ sont bornées.

Limite d'une suite complexe

Pour les suites complexes, on ne définit pas la notion de limite infinie. Il y a donc uniquement les suites convergentes (limite finie) et les autres, qui sont divergentes.

Définition 12.33 – Convergence dans $\mathbb{C}$

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que (u_n) tend vers ℓ ou converge vers ℓ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

et on écrit $u_n \to \ell$ ou $\lim u_n = \ell$.

Comparé aux suites réelles, la valeur absolue est donc devenue un module. Beaucoup de résultats s'étendent au cas complexe en modifiant un peu les preuves :

Théorème 12.34

- La limite éventuelle d'une suite complexe est unique.
- Toute suite complexe convergente est bornée.
- Pour tous $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell, \ell' \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} u_n \to \ell \\ v_n \to \ell' \end{cases} \implies \begin{cases} u_n + v_n \to \ell + \ell' & \\ \lambda u_n \to \lambda \ell & \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C} \\ u_n v_n \to \ell \ell' & \\ \dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{\ell} & \text{si } \ell \neq 0 \text{ et } u_n \neq 0 \text{ à partir d'un certain rang} \end{cases}$$

- Si (u_n) est bornée et $v_n \to 0$ alors $u_n v_n \to 0$.

Enfin, on a également cette caractérisation utile pour se ramener au cas réel :

Théorème 12.35

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $u_n \to \ell$
2. $\operatorname{Re} u_n \to \operatorname{Re} \ell$ et $\operatorname{Im} u_n \to \operatorname{Im} \ell$

Enfin, le théorème d'encadrement et la notion de suites adjacentes utilisent l'ordre $\leq$ et n'ont donc pas d'équivalent pour les suites complexes.

Suites extraites

Toutes les définitions et les théorèmes de la section 4.1 restent valides dans le cas complexe.

Remarque (Sous-sous-suite)**.** Étant donné une suite u (réelle ou complexe) et deux extractrices φ, ψ :

$$(u_{\varphi(n)}) \quad \text{est une sous-suite de} \quad (u_n)$$

$$(u_{\varphi(\psi(n))}) \quad \text{est une sous-suite de} \quad (u_{\varphi(n)}) \quad \text{et donc de} \quad (u_n)$$

Par contre, $(u_{\psi(\varphi(n))})$ n'est en général pas une sous-suite de $(u_{\varphi(n)})$:

Exemple 17 (Contre-exemple)**.** Si $u_n = n$, $\varphi(n) = 2n$ et $\psi(n) = n+1$,

$$u_{\psi(\varphi(n))} = u_{2n+1} = 2n+1$$

n'est clairement pas une suite extraite de la suite $(u_{\varphi(n)}) = (u_{2n}) = (2n)$, car elles n'ont aucun terme en commun.

Théorème 12.36 – Bolzano-Weierstrass complexe

Toute suite complexe bornée admet une sous-suite convergente.

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée par un réel $K \geq 0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\operatorname{Re} u_n| \leq |u_n| \leq K$$

Donc la suite *réelle* $(\operatorname{Re} u_n)$ est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass réel, il existe une sous-suite $(\operatorname{Re} u_{\varphi(n)})$ qui converge vers $a \in \mathbb{R}$.

$\square$

5.2 Limite de $f(u_n)$, caractérisations de la densité et du "sup"

Théorème 12.37 – Limite de $f(u_n)$

Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $u : \mathbb{N} \to I$ une suite à valeurs dans I. On a

$$\begin{cases} u_n \to a \in \overline{\mathbb{R}} \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \implies f(u_n) \to b$$

En particulier, si $a \in I$ et f est continue en a, alors $b = f(a)$ et donc $f(u_n) \to f(a)$.

Exemple 18. Si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $e^{u_n} \to e^{\ell}$.
Si $u_n \to 0$, alors $\ln(1+u_n) \to 0$.

Théorème 12.38 – Caractérisation de la densité

Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel x, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Exemple 19. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \to x$ et $r_n \in \mathbb{D}$ donc $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (idem pour $\mathbb{Q}$). Pour la preuve de $r_n \to x$, cf TD.

Théorème 12.39 – Caractérisation de la borne supérieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $s = \sup A$

(ii) s est un majorant de A et il existe une suite (x_m) d'éléments de A telle que $x_m \to s$.

6 Suites particulières

6.1 Suites récurrente linéaire d'ordre 1

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite (réelle ou complexe).

Suite arithmétique

Définition : $u_0 \in \mathbb{K}$ est donné et il existe raison $r \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r$$

Terme général : $u_n = u_0 + nr$
Somme des termes :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} \qquad \frac{\text{premier terme } + \text{dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes}$$

Suite géométrique

Définition : $u_0 \in \mathbb{K}$ est donné et il existe une raison $q \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = qu_n$$

Terme général : $u_n = q^n u_0$
Somme des termes :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Rappel : on a étudié la limite éventuelle de (q^n) : celle de $(u_n) = (u_0 q^n)$ s'en déduit facilement au cas par cas.

Suite arithmético-géométrique

Définition 12.40

On dit que (u_n) est une suite arithmético-géométrique s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$u_{n+1} = au_n + b$$

Pour calculer le terme général u_n, on applique la méthode suivante :

Méthode

Soit (u_n) arithmético-géométrique telle que $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$.

1. On cherche ω tel que $\omega = a\omega + b$. On trouve $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.
2. On écrit
$$\begin{cases} u_{n+1} & = au_n + b \\ \omega & = a\omega + b \end{cases} \implies (u_{n+1} - \omega) = a(u_n - \omega)$$
   Ainsi, la suite $(u_n - \omega)$ est géométrique de raison a.
3. En tant que suite géométrique : $u_n - \omega = (u_0 - \omega) \times a^n$, donc
$$u_n = \omega + (u_0 - \omega) \times a^n$$

6.2 Suites récurrente linéaire d'ordre 2

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite (réelle ou complexe).

Définition 12.41 – Suite récurrente linéaire d'ordre 2

u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On définit l'équation caractéristique associée

$$(C) : \qquad r^2 = ar + b$$

Pour qu'une telle suite soit bien définie, il faut aussi donner les valeurs de $u_0, u_1 \in \mathbb{K}$.

Théorème 12.42 – Résolution, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Si (C) admet deux racines distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, alors il existe $A, B \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

- Si (C) admet une racine double $r \in \mathbb{C}$, alors il existe $A, B \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = r^n (A + Bn)$$

Théorème 12.43 – Résolution, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- Si (C) admet deux racines distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

- Si (C) admet une racine double $r \in \mathbb{R}$, alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = r^n (A + Bn)$$

- Si (C) n'a pas de racines réelles, les racines complexes sont, sous forme exponentielle, $r = \rho e^{i\theta}$ et $\overline{r}$. Alors, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \rho^n (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$$

Démonstration. Plus tard, dans un chapitre qui n'a, semble-t-il, aucun rapport... Surprise ! □

Les valeurs u_0, u_1 données permettent de calculer les constantes A, B en regardant les formules pour $n = 0$ et $n = 1$.

Exemple 20. Calculer le terme général de la suite de Fibonacci (u_n), définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

Étonnant : malgré toutes ces racines carrées, on a $u_n \in \mathbb{N}$!

6.3 Suites récurrentes d'ordre 1, cas général

On se place dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On suppose que $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle non trivial. Enfin, on considère $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 12.44 – Suite récurrente d'ordre 1

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite récurrente d'ordre 1 (associée à f) si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

Une telle suite (u_n) n'est pas nécessairement bien définie.

Définition 12.45

Soit $J \subset I$. On dit que J est stable par f si $f(J) \subset J$, càd

$$\forall x \in J \qquad f(x) \in J$$

Si un tel ensemble J existe, alors pour tout $a \in J$, la suite

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in J$.

Démonstration. Comme $f : J \to J$ est bien définie, on a par récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n \text{ fois}}(u_0)$$

est bien défini et appartient à J. $\square$

Théorème 12.46

Soit $f : J \to J$ une fonction et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\begin{cases} u_0 \in J \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Si (u_n) converge vers $\ell \in J$ et f est continue en ℓ, alors

$$f(\ell) = \ell$$

Un réel ℓ qui vérifie $f(\ell) = \ell$ est dit un point fixe de f.

Démonstration. Comme $u_n \to \ell$ et que f est continue en ℓ, alors $f(u_n) \to f(\ell)$. De plus $u_{n+1} \to \ell$. Donc en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on trouve

$$\ell = \lim u_{n+1} = \lim f(u_n) = f(\ell)$$

□

Méthode – Vous serez souvent très guidés ! !

On souhaite étudier une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec u_0 donné.

1. Étudier f : trouver D_f et établir son tableau de variations (avec les bornes).
2. Résoudre l'équation $f(\ell) = \ell$. Placer chaque solution dans le tableau.
3. Identifier un ensemble J tel que

$$u_0 \in J \qquad J \text{ est stable par } f \qquad f \text{ est monotone sur } J$$

On a alors $u_n \in J$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Si f est décroissante sur J, vous serez guidés... Si f est croissante sur J, alors deux cas possibles :
   (a) Si $u_1 \geq u_0$, alors comme f est croissante, $u_{n+1} \geq u_n$ par récurrence immédiate.
   (b) Si $u_1 \leq u_0$, alors comme f est croissante, $u_{n+1} \leq u_n$ par récurrence immédiate.

La suite (u_n) est donc monotone. Supposons (u_n) croissante pour simplifier.

5. Plusieurs arguments peuvent conclure :
   (A) Si (u_n) est majorée (automatique si J est majoré), alors (u_n) converge vers un réel ℓ, qui doit vérifier

$$\ell \in J \qquad \ell = f(\ell) \qquad u_0 \leq \ell \qquad (\ell \leq u_0 \text{ si } (u_n) \text{ décroissante}) \qquad (E_\ell)$$

   Si on a bien choisi J, il n'y a qu'un seul réel ℓ_0 qui vérifie ces relations. Donc $\lim u_n = \ell_0$.
   (B) Si on peut choisir J de sorte qu'aucun réel ℓ ne vérifie les relations (E_ℓ), alors nécessairement (u_n) ne peut être convergente. Ainsi, $\lim u_n = +\infty$.

Exemple 21. Étudier la suite récurrente $u_{n+1} = \dfrac{1}{6}(u_n^2 + 8)$ avec $u_0 = 1$, puis avec $u_0 = 5$.

7 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer qu'une suite (u_n) est **monotone**, on peut :

- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$ on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.
- si on a une relation explicite $u_n = F(n)$, étudier la monotonie de F.

Méthode

Pour montrer qu'une suite (u_n) **converge**, on peut :

- chercher si elle est croissante majorée, ou décroissante minorée.
- l'encadrer par deux suites convergentes de même limite.
- chercher une autre suite qui lui serait adjacente.
- montrer que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite.

Méthode

Pour montrer qu'une suite (u_n) **diverge**, on peut :

- en extraire deux sous-suites qui admettent des limites différentes.
- tenter de la majorer par une suite qui tend vers $-\infty$ ou la minorer par une suite qui tend vers $+\infty$.
- chercher si elle est croissante non majorée, ou décroissante non minorée.
- chercher si elle n'est pas bornée.