Chapitre 11

Nombres réels

Plan du chapitre

1 Propriété de la borne supérieure

1.1 Majorants, minorants, maximum, minimum

Définition 11.1 – Majorants, minorants

Soit $m, M \in \mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que :

- A est majorée par M si tout élément de A est inférieur ou égal à M, càd $\forall x \in A \quad x \leq M$.
- A est minorée par m si tout élément de A est supérieur ou égal à m, càd $\forall x \in A \quad x \geq m$.
- A est majorée si A admet un majorant.
- A est minorée si A admet un minorant.
- A est bornée si A est à la fois majorée et minorée.

On dit aussi que M est un majorant de A, et que m est un minorant de A.

Exemple 1.

- L'ensemble $\left]0,1\right]$ est minorée par 0, par -7 (etc.) et majoré par 1, par 12 (etc.). Il est donc borné.
- L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majoré, l'ensemble $\mathbb{R}_-$ n'est pas minoré.
- Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ ne sont ni minorés ni majorés.

Définition 11.2 – Maximum, minimum

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que :

- $M \in \mathbb{R}$ est ***le*** maximum de A si M est un majorant de A et $\boxed{M \in A}$.
- $m \in \mathbb{R}$ est ***le*** minimum de A si m est un minorant de A et $\boxed{m \in A}$.

On dit aussi que M est le plus grand élément de A et que m est le plus petit élément de A.

Théorème 11.3

Le maximum et le minimum, lorsqu'ils existent, sont uniques. Ils sont notés respectivement :

$$\max A \qquad \text{et} \qquad \min A$$

Démonstration. Supposons que M et M' soient deux maximum d'un même ensemble A.

- Comme M majore A et que $M' \in A$, on a $M' \leq M$.
- Comme M' majore A et que $M \in A$, on a $M \leq M'$.

Ainsi, $M = M'$: le maximum est bien unique. □

Exemple 2.
- $\min \left[0, 1\right] = 0$ et $\max \left[0, 1\right] = 1$
- $\min \left[0, 1\right[= 0$ mais $\left[0, 1\right[$ n'admet pas de maximum.

- Un ensemble non majoré n'admet pas de maximum donc $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ n'admettent pas de maximum.

1.2 Borne supérieure, borne inférieure

Définition 11.4 – Borne inférieure, borne supérieure

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que :

- $M \in \mathbb{R}$ est ***la*** borne supérieure de A si M est le plus petit des majorants de A.
- $m \in \mathbb{R}$ est ***la*** borne inférieure de A si m est le plus grand des minorants de A.

La borne supérieure et la borne inférieure, lorsqu'elles existent, sont uniques. Elles sont notées respectivement :

$$\sup A \qquad \text{et} \qquad \inf A$$

Exemple 3. ∘ Si $A=\left[0,1\right[$, alors les majorants de A sont tous les éléments de l'ensemble $B=\left[1,+\infty\right[$. Le plus petit d'entre eux est 1, car c'est le minimum de B. On a donc

$$\sup A=\sup\left[0,1\right[=1 \qquad (=\min B)$$

∘ Pour l'ensemble $A'=\left[0,1\right]$, alors les majorants de A' sont, là encore, tous les éléments de l'ensemble $B=\left[1,+\infty\right[$. On a donc

$$\sup A'=\sup\left[0,1\right]=1 \qquad (=\min B)$$

Remarque. Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non majorée, alors elle n'admet pas de majorant et par suite, pas de borne supérieure (on ne peut pas choisir le plus petit des majorants s'il n'y en a pas !).

Théorème 11.5 – Axiome : propriété de la borne supérieure

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

On dit que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.

Démonstration. Admise en MPSI. □

Dans les exercices faisant intervenir des bornes supérieures et/ou inférieures, on utilisera surtout la caractérisation suivante :

Théorème 11.6 – Caractérisation de la borne supérieure / inférieure

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si A est majorée,

$$M=\sup A \iff \begin{cases}\forall x\in A & & x\leq M\\ \forall \varepsilon>0 & \exists x\in A & x>M-\varepsilon\end{cases}$$

De même, si A est minorée,

$$m=\inf A \iff \begin{cases}\forall x\in A & & x\geq m\\ \forall \varepsilon>0 & \exists x\in A & x<m+\varepsilon\end{cases}$$

Exemple 4. On pose $A=\left\{1-\dfrac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$. Montrer que $\sup A=1$.

Remarque. Comme le montre l'exemple ci-dessus, contrairement à $\max A$, le réel $\sup A$ n'appartient pas forcément à A.
De plus, un(e) majorant / minorant / maximum / minimum / "borne sup" / "borne inf" doit toujours être un élément de $\mathbb{R}$: ils ne peuvent pas valoir $+\infty$ ou $-\infty$ (sauf si on vous impose une convention...).

Théorème 11.7

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et $\max A = \sup A$.

De même, si A admet un minimum, alors A admet une borne inférieure et $\min A = \inf A$.

Démonstration. Soit $M = \max A$ le maximum de A. (Montrons que M vérifie la caractérisation de la borne supérieure). Comme M est un majorant de A, on a

$$\forall x \in A \quad x \leq M$$

Prouvons maintenant que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad x > M - \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $x = M \in A$. Alors $M > M - \varepsilon$. Donc cette assertion est vraie. Ainsi, A admet une borne supérieure et $M = \sup A$. $\square$

La réciproque de du théorème 11.7 est fausse : on a vu que si $A = \left[0, 1\right[$, alors $\sup A = 1$ mais A n'admet pas de maximum.

1.3 Fonctions et max / min / sup / inf

Définition 11.8

Soit $f : \left[a, b\right] \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) si l'ensemble $f(\left[a, b\right])$ admet un maximum (resp. minimum) et dans ce cas, par définition :

$$\max_{x \in \left[a,b\right]} f(x) := \max f(\left[a, b\right]) \qquad \min_{x \in \left[a,b\right]} f(x) := \min f(\left[a, b\right])$$

De même pour les notions de supremum et d'infimum d'une fonction :

$$\sup_{x \in \left[a,b\right]} f(x) := \sup f(\left[a, b\right]) \qquad \inf_{x \in \left[a,b\right]} f(x) := \inf f(\left[a, b\right])$$

Ainsi, si A est une partie de $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire $A = \left\{ f(x) \mid x \in D_f \right\}$ pour une fonction f, on peut notamment étudier les variations de f pour en déduire le maximum / supremum / ... de A

Exemple 5. Déterminer le minimum de l'ensemble $A = \left\{ x \ln x \mid x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$. Est-ce que A admet un maximum ? une borne supérieure ?

2 Approximation décimale d'un réel

Définition 11.9 – Ensemble $\mathbb{D}$

On dit qu'un réel x est un nombre décimal si on peut l'écrire avec un nombre fini de décimales, ou de manière équivalente si

$$\exists a \in \mathbb{Z} \qquad \exists n \in \mathbb{N} \qquad x = \frac{a}{10^n}$$

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux :

$$\mathbb{D} := \left\{ \frac{a}{10^n} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Tout nombre entier est un nombre décimal. Plus généralement, si $x = \dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors x possède au plus n décimales.

On notera que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Exemple 6. On a $0,654 = \dfrac{654}{1000} \in \mathbb{D}$ ou encore $\dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{100} \in \mathbb{D}$, mais $\dfrac{1}{3} = 0,3333(\ldots) \notin \mathbb{D}$.

Exemple 7. Étant donné $k \in \mathbb{N}^*$, on peut montrer que $\dfrac{1}{k} \in \mathbb{D}$ si et seulement si $k = 2^p 5^q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$.

Théorème 11.10

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le nombre décimal $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \in \mathbb{D}$ vérifie

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}$$

r_n est appelé valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près.
$r_n + \dfrac{1}{10^n}$ est appelé valeur approchée par excès de x à 10^{-n} près.

Démonstration. Par définition de la partie entière, on a

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$$

et donc on en déduit l'inégalité voulue en divisant par 10^n. □

Exemple 8.

	1	$\sqrt{2}$	e	-1	$-\sqrt{2}$
Développement décimal	1	1,41421...	2,71828...	-1	$-1,41421\ldots$
par défaut à 10^{-3} près	$1,000$	$1,414$	$2,718$	....	....
par excès à 10^{-3} près	$1,001$	$1,415$	$2,719$	....	....

Pour un réel ...., la valeur par défaut à 10^{-n} près s'obtient en tronquant son développement décimal à la n-ième décimale.

3 Parties denses dans $\mathbb{R}$

Théorème 11.11 – Partie dense

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On dit que X est dense dans $\mathbb{R}$ si elle vérifie l'une de ces assertions (qui sont équivalentes) :

(*i*) Pour tous réels a,b avec $a<b$, l'intervalle $]a,b[$ contient (au moins) un élément de X.

(*ii*) Pour tous réels a,b avec $a<b$, l'intervalle $]a,b[$ contient une infinité d'éléments de X.

On peut traduire le fait que l'intervalle $]a,b[$ contient (au moins) un élément de X par : $]a,b[\cap X \neq \varnothing$.

Démonstration. Montrons que ces deux assertions sont équivalentes. Le sens (*ii*) $\Longrightarrow$ (*i*) est évident. Montrons (*i*) $\Longrightarrow$ (*ii*). Soit $a<b$ deux réels. Montrons que $]a,b[$ contient une infinité d'éléments de X. Il suffit pour cela de montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'intervalle $]a,b[$ contient (au moins) n éléments de X. On pose, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$,

$$a_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

On a alors $a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n=b$. Or, par (*i*), chaque intervalle $]a_k,a_{k+1}[$ contient un élément $x_k\in X$. Ainsi, l'intervalle $]a,b[$ contient $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$ qui sont tous des éléments de X. D'où le résultat. □

Théorème 11.12

Les ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Heuristique de la preuve. Soit $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$. Montrons que $]a,b[$ contient un élément de $\mathbb{D}$, puis de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

On pose $x=\dfrac{a+b}{2}$, de sorte que $a<x<b$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $r_n\in\mathbb{D}$ la valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près. Pour $n\in\mathbb{N}$ assez grand, on peut montrer que

$$a<r_n\leq x<b$$

et donc $r_n \in \left]a,b\right[\cap \mathbb{D}$. On en déduit que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, on a également $r_n \in \left]a,b\right[\cap \mathbb{Q}$, donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Enfin, montrons que $\left]a,b\right[$ contient un irrationnel. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, l'intervalle $\left]a-\sqrt{2}, b-\sqrt{2}\right[$ contient un rationnel q. Donc $\left]a,b\right[$ contient $q+\sqrt{2}$. Or, $\sqrt{2}$ est irrationnel et on sait que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel, donc $q+\sqrt{2} \in \left]a,b\right[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Ainsi, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. □

Corollaire 11.13

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. L'intervalle $\left]a,b\right[$ contient une infinité de décimaux, de rationnels et d'irrationnels.

Corollaire 11.14

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe (au moins) un décimal, un rationnel et un irrationnel dans $\left]x-\varepsilon, x+\varepsilon\right[$.

Ainsi, avec ε aussi petit que l'on souhaite, on pourra toujours trouver un rationnel r qui vérifie $|r-x| < \varepsilon$. Autrement dit, **on pourra toujours trouver un rationnel aussi "près" que l'on veut d'un réel x donné**.

4 Compléments

4.1 La droite numérique achevée

Définition 11.15 – Droite numérique achevée

On note $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, où $-\infty$ et $+\infty$ sont deux éléments qui ne sont pas dans $\mathbb{R}$.

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ l'ordre $\leq$ défini sur $\mathbb{R}$, avec les relations

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -\infty < x < +\infty$$

(càd $x \leq +\infty$ et $x \neq +\infty$, idem pour $-\infty$).

On verra au prochain chapitre qu'on peut également définir les opérations $+$, $-$, $\times$, etc. sur $\overline{\mathbb{R}}$. À ce stade, il s'agit plus d'une commodité qu'autre chose.

4.2 Les intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 11.16

Soit $I \subset \mathbb{R}$. On dit que I est un <u>intervalle (de $\mathbb{R}$)</u> si

$$\forall a, b \in I \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (a \leq x \leq b \implies x \in I)$$

En d'autres termes, un intervalle est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'a pas de "trou" : si deux points a et b sont dans un intervalle (sans être forcément les bornes), tous les points du segment qui relie a à b sont aussi dans cet intervalle.

On peut alors montrer que tout intervalle de $\mathbb{R}$ s'écrit : $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta[$, $]\alpha,\beta]$ ou $]\alpha,\beta[$ avec $\alpha,\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\alpha \leq \beta$, avec l'interdiction de "fermer" en $\pm\infty$: $\cancel{[-\infty}, \dots$ et $\cancel{+\infty]}$.

4.3 Hors-programme : $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure

La propriété de la borne supérieure (théorème 11.5) est un axiome et une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, inhérente à sa construction. Très grossièrement, cela veut dire que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admet une limite finie, cette limite "ne sort pas de $\mathbb{R}$" et restera dans $\mathbb{R}$.
Par contre, $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure : on peut trouver une suite à valeurs dans $\mathbb{Q}$ dont la limite (finie) n'est pas dans $\mathbb{Q}$. En utilisant le développement décimal de $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1,4142135623...$$

on peut définir une suite u_n :

$$\begin{array}{ll} u_0 = 1 & u_3 = 1,414 \\ u_1 = 1,4 & u_4 = 1,4142 \\ u_2 = 1,41 & \dots\dots \end{array}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $u_n \in \mathbb{Q}$. Mais la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\sqrt{2}$ qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. C'est une façon de prouver que $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure.

5 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour déterminer la borne supérieure M d'un ensemble A :

- On cherche d'abord quelle est la réponse attendue pour M, en regardant l'ensemble A. Ensuite, deux options sont possibles :
  - On utilise la caractérisation de la borne supérieure.
  - Si on constate que $M \in A$, on peut à la place montrer que M est le maximum de A, ce qui est plus simple.
- Si A correspond à l'ensemble image d'une fonction réelle, on peut aussi étudier cette fonction pour en trouver le maximum, qui sera alors le maximum de A (donc en particulier la borne supérieure).