

Chapitre 10

Équations différentielles

Plan du chapitre

1	Généralités sur les ED	1
1.1	Vocabulaire des ED	1
1.2	ED linéaires	2
1.3	Structure des solutions d'une ED linéaire	3
2	ED linéaires du premier ordre	5
2.1	Cas général	5
2.2	Conditions initiales	7
2.3	Cas avec a, b constants	8
3	ED linéaires du second ordre à coefficients constants	9
3.1	Résolution de E	10
3.2	Principe de superposition	14
3.3	Conditions initiales	15
4	Compléments	16
4.1	Une conséquence de Cauchy-Lipschitz (ordre 1)	16
4.2	Les "astuces" des physiciens... (HORS PROGRAMME)	17
4.3	ED d'ordre 1 non résolue : $a_1(t)y' + a_0(t)y = b_0(t)$	17
5	Méthodes pour les exercices	19

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, la lettre \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de \mathbb{R} non trivial.

1 Généralités sur les ED

1.1 Vocabulaire des ED

Une équation différentielle (ou ED) est une équation entre fonctions qui fait intervenir une fonction inconnue (en général notée y) ainsi qu'au moins une de ses dérivées. Toutes les équations suivantes sont des ED :

$$E_1 : y' - y = 0$$

$$E_2 : y'' + y = \tan x$$

$$E_3 : y'y^{(3)} + xy^2 = e^x$$

Par contre $ay^2 + by + c = 0$ n'est pas une ED, car elle ne fait pas intervenir de dérivées sur y . C'est simplement une équation sur y , et on comprend dans ce cas que y est un élément de \mathbb{K} .

Réécrivons les trois ED :

$$E_1 : y' - y = 0$$

$$E_2 : 4y'' + y = \tan x$$

$$E_3 : y'y^{(3)} + xy^2 = e^x$$

Remarque (Qui est la fonction, qui est la variable). Pour E_2 et E_3 , le x n'est pas une fonction, mais la variable de la fonction y . Par exemple, pour E_2 , on cherche toutes les fonctions $y : x \mapsto y(x)$ qui soient deux fois dérivables et telles que pour tout x ,

$$4y''(x) + y(x) = \tan x$$

Souvent, on omet de préciser qui est la fonction inconnue (ici y) et qui est la variable (ici x pour E_2 et E_3). En pratique, il y a rarement ambiguïté. Par exemple pour l'ED $x' + tx = 0$, on comprend que x est la fonction inconnue (vu que x' n'a de sens que si x est une fonction) et t est sa variable.

Remarque (Abus de notation). Bien que $\tan x$, x et e^x soient des nombres, E_2 et E_3 représentent une égalité entre fonctions : il y a en fait un abus de notation. On sous-entend que $\tan x$, x et e^x sont en fait les fonctions $x \mapsto \tan x$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$ respectivement.

L'ordre d'une ED est l'indice de dérivation le plus élevé qui apparaît dans l'équation. Par exemple, E_1, E_2, E_3 sont d'ordre 1, 2, 3 respectivement.

L'intervalle de définition (ou d'étude) d'une ED est un intervalle I , le plus large possible, sur lequel toutes les fonctions de l'équation sont bien définies. Pour E_1 et E_3 , on a $I = \mathbb{R}$. Pour E_2 , plusieurs choix sont possibles : par exemple $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ou $I =]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Il arrive qu'on impose des conditions initiales sur y : par exemple $y(0) = y_0 \in \mathbb{K}$ et/ou $y'(0) = y_1 \in \mathbb{K}$. On doit alors trouver une fonction qui vérifie l'équation ainsi que les conditions initiales.

Résoudre une ED, c'est trouver, sur un intervalle d'étude I , **toutes** les fonctions $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ qui vérifient l'équation ainsi que les éventuelles conditions initiales.

1.2 ED linéaires

Définition 10.1 – ED linéaire

Une ED est dite linéaire si elle est de la forme

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ est l'ordre de l'ED, et $a_0, a_1, \dots, a_n, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions connues. Les fonctions a_0, a_1, \dots, a_n sont appelées coefficients de l'ED. La fonction b est appelée second membre de l'ED.

Cette ED linéaire est dite (sous forme) résolue si $a_n(t) \equiv 1$, sinon elle est dite (sous forme) non résolue.

Exemple 1. E_1 et E_2 sont linéaires, mais pas E_3 . E_1 est résolue, mais pas E_2 .

Exemple 2. Compléter le tableau suivant :

		Ordre	Intervalle I	Linéaire ?			Ordre	Intervalle I	Linéaire ?
E_4	$5y^{(5)} + y^{(3)} = 0$				E_7	$y' + y = 1 + ye^x$			
E_5	$y' + y^2 = t$				E_8	$\frac{1}{i\theta}y^{(4)} + e^{i\theta}y' = 0$			
E_6	$yy'' = \frac{1}{t}$				E_9	$\frac{1}{y'} = \frac{1}{y}$			

Définition 10.2 – ED linéaire homogène

On considère une ED linéaire :

$$E : a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

On lui associe une équation homogène (ou sans second membre) en remplaçant $b(t)$ par 0 :

$$E_H : a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

On remarquera que E_H est aussi une ED linéaire. Dans ce chapitre, toutes les ED qu'on étudiera seront linéaires. Cette linéarité permet d'obtenir **toutes** les solutions de E à partir **d'une** solution (dite particulière) de E et de **toutes** les solutions de E_H , cf section suivante.

1.3 Structure des solutions d'une ED linéaire

Définition 10.3 – Ensemble $a + B$

Soit $a \in \mathbb{K}$ et $B \subset \mathbb{K}$. On définit l'ensemble $a + B$ par

$$a + B = \{a + b \in \mathbb{K} \mid b \in B\}$$

On note aussi $B + a = a + B$. Attention, a est un élément de \mathbb{K} mais B et $a + B$ sont des ensembles.

Exemple 3. L'ensemble des nombres impairs positifs s'écrit

$$2\mathbb{N} + 1 = \{n + 1 \mid n \in 2\mathbb{N}\} = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

L'ensemble des nombres impairs (de signe quelconque) s'écrit $2\mathbb{Z} + 1$.

On considère une ED linéaire et son équation homogène associée.

$$E : a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

$$E_H : a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

On note :

- \mathcal{S} l'ensemble des solutions de l'ED linéaire E .
- \mathcal{S}_H l'ensemble des solutions de l'équation homogène E_H .

On veut résoudre E , c'est-à-dire trouver \mathcal{S} .

Théorème 10.4 – Structure de \mathcal{S}

Soit $y_p \in \mathcal{S}$ une solution (dite particulière) de E . Alors pour toute fonction $y : I \rightarrow \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}y \in \mathcal{S} &\iff y - y_p \in \mathcal{S}_H \\ &\iff y \in \{y_p + y_H \mid y_H \in \mathcal{S}_H\} \\ &\iff y \in y_p + \mathcal{S}_H\end{aligned}$$

Autrement dit, $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_H$.

Ainsi, pour déterminer \mathcal{S} (donc **toutes** les solutions de E), il suffit de trouver **une** solution particulière $y_p \in \mathcal{S}$ ainsi que l'ensemble \mathcal{S}_H (càd **toutes** les solutions de E_H).

□

2 ED linéaires du premier ordre

Dans cette section, on s'intéresse aux ED linéaires du premier ordre. On considère dans un premier temps une ED sous forme résolue, donc sous la forme

$$E : y' + a(t)y = b(t)$$

avec $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions données.

Hypothèse

On suppose que $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions *continues* (donc en particulier on peut calculer leur intégrale).

2.1 Cas général

L'équation homogène associée à E est donnée par :

$$E_H : y' + a(t)y = 0$$

Pour résoudre E , il faut trouver l'ensemble de solutions \mathcal{S} . D'après le théorème 10.4, il suffit de trouver une solution particulière $y_p \in \mathcal{S}$ et de déterminer l'ensemble \mathcal{S}_H , qui est l'ensemble de solutions de l'équation homogène :

$$E_H : y' + a_0 y = 0$$

Étape 1 : solution générale de E_H .

Théorème 10.5

Soit $A : I \rightarrow \mathbb{K}$ une primitive (quelconque) de a . Toutes les solutions de $y' + a(t)y = 0$ sont exactement les fonctions de la forme

$$y_H(t) = Ce^{-A(t)} \quad \text{avec } C \in \mathbb{K}$$

□

Étape 2 : solution particulière de E .

Deux méthodes sont possibles : ou bien on trouve une solution “évidente”, ou bien on utilise la méthode de la variation de la constante.

Méthode – Variation de la constante

On cherche une solution particulière de $y' + a(t)y = b(t)$. On part de la solution générale de l'équation homogène E_H , à savoir

$$y_H(t) = Ce^{-A(t)} \quad \text{avec } C \in \mathbb{K}.$$

Ensuite, on pose une fonction y_p de la même forme que y_H mais où C est remplacée par une fonction inconnue $C(t)$:

$$y_p(t) = C(t)e^{-A(t)}$$

Pour trouver $C(t)$, on injecte cette forme de y_p dans l'équation :

$$\begin{aligned} y_p' + a(t)y_p = b(t) &\iff C'(t)e^{-A(t)} - a(t)C(t)e^{-A(t)} + a(t)C(t)e^{-A(t)} = b(t) \\ &\iff C'(t)e^{-A(t)} = b(t) \\ &\iff C'(t) = b(t)e^{A(t)} \end{aligned}$$

La fonction C est ainsi une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ sur I . Pour en trouver une, on fixe $t_0 \in I$ comme on le souhaite et on pose :

$$C(t) = \int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)} ds$$

Ainsi,

$$y_p(t) = C(t)e^{-A(t)} = e^{-A(t)} \int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)} ds$$

Remarque. La fonction $C : t \mapsto C(t)$ choisie est l'unique primitive de be^A qui s'annule en t_0 . Chaque valeur de t_0 conduit à une solution particulière y_p différente. Comme on a juste besoin d'une seule solution particulière, on prend la valeur de t_0 la plus simple possible (par exemple $t_0 = 0$ si $0 \in I$).

Étape 3 : solution générale de E .

Par le théorème 10.4, y est solution de E si et seulement si

$$y(t) = y_p(t) + Ce^{-A(t)} \quad (*)$$

avec $C \in \mathbb{K}$. Attention à ne pas confondre $C(t)$, à savoir la fonction déterminée par la variation de la constante, et la constante C dans $Ce^{-A(t)}$, qui est une constante quelconque de \mathbb{K} .

Remarque. Chaque valeur de C dans (*) donne une solution différente : il y a donc une infinité de solutions pour l'équation E . C'est le cas pour toute ED linéaire.

Exemple 4. Résoudre $y' + xy = 4x$.

Exemple 5. Résoudre $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

2.2 Conditions initiales

Définition 10.6 – Problème de Cauchy (ordre 1)

Soit $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues et $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Le système

$$(PC) : \begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est appelé un problème de Cauchy (ici linéaire, d'ordre 1)

Théorème 10.7 – Théorème de Cauchy-Lipschitz (ordre 1)

Pour chaque couple $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy (PC) admet une unique solution $y : I \rightarrow \mathbb{K}$.

Un problème de Cauchy correspond à un phénomène d'évolution d'une "grandeur" $y(t)$ en fonction du temps t . Une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz est que :

- Si on connaît la valeur de $y(t)$ en un temps t_0 , c'est-à-dire on sait que $y(t_0) = y_0$ où y_0 est donné
- Si on connaît la loi d'évolution de $y(t)$, c'est-à-dire on connaît l'ED vérifiée par $y : y' + a(t)y = b(t)$

Alors cela suffit pour déterminer $y(t)$ de manière unique pour tous les temps t .

Pour trouver cette unique solution, on trouve d'abord la solution générale de l'équation (qui dépend d'une constante $C \in \mathbb{K}$). Puis on regarde quelle (unique) valeur de C permet de vérifier la condition initiale.

Exemple 6. Résoudre le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

2.3 Cas avec a, b constants

On suppose dans cette sous-partie que les fonctions a et b sont constantes : $a(t) \equiv a_0 \in \mathbb{K}$ et $b(t) \equiv b_0 \in \mathbb{K}$.

$$E : y' + a_0y = b_0$$

Dans ce cas, l'intervalle de définition est $I = \mathbb{R}$. Pour résoudre E , il faut trouver \mathcal{S} . D'après le théorème 10.4, il suffit de trouver une solution particulière $y_p \in \mathcal{S}$ et de déterminer l'ensemble \mathcal{S}_H , qui est l'ensemble de solutions de :

$$E_H : y' + a_0y = 0$$

Étape 1 : solution générale de E_H – trouver \mathcal{S}_H .

Une primitive de la fonction constante $a : t \rightarrow a_0$ est

$$A : t \rightarrow a_0t$$

Donc une fonction y_H est dans \mathcal{S}_H si et seulement si y_H est de la forme

$$y_H(t) = Ce^{-a_0t} \quad \text{avec } C \in \mathbb{K}$$

Ainsi, $\mathcal{S}_H = \{t \mapsto Ce^{-a_0t} \mid C \in \mathbb{K}\}$.

Étape 2 : solution particulière de E – trouver y_p .

Maintenant, on cherche *une* solution particulière de $y' + a_0y = b_0$. On remarque que la fonction

$$y_p(t) := \begin{cases} b_0t & \text{si } a_0 = 0 \\ \frac{b_0}{a_0} & \text{si } a_0 \neq 0 \end{cases}$$

est bien une solution particulière de E .

Étape 3 : solution générale de E – trouver \mathcal{S} .

On a donc $y \in \mathcal{S}$ si et seulement si y est de la forme

$$y(t) = y_p(t) + Ce^{-a_0t} \quad \text{avec } C \in \mathbb{K}$$

Exemple 7. Résoudre $y' + 2y = -3$.

3 ED linéaires du second ordre à coefficients constants

Dans cette partie, on s'intéresse aux ED linéaires du second ordre à coefficients constants :

$$E : ay'' + by' + cy = d(t)$$

L'équation homogène associée est

$$E_H : ay'' + by' + cy = 0$$

Hypothèse

On suppose $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. De plus, $d : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction *continue* donnée.

On pourrait en particulier mettre E sous forme résolue en divisant par a .

3.1 Résolution de E

Étape 1 : solution générale de E_H

Lorsque a, b et/ou c sont des complexes non réels, on doit se placer sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Théorème 10.8 – Résolution de $E_H, \mathbb{K} = \mathbb{C}$

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On associe à E_H l'équation caractéristique

$$(C) : ar^2 + br + c = 0$$

dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.

- Si $\Delta \neq 0$, on note r_1, r_2 les deux racines (complexes) de (C) . Alors $y_H \in \mathcal{S}_H$ si et seulement si

$$y_H(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{C}$$

- Si $\Delta = 0$, on note $r_0 = -\frac{b}{2a}$ l'unique racine (complexe) de (C) . Alors $y_H \in \mathcal{S}_H$ si et seulement si

$$y_H(t) = (A + Bt)e^{r_0 t} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{C}$$

Lorsque a, b et/ou c sont des réels, il faut se placer sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on cherche des solutions de E à valeurs dans \mathbb{R} .

Théorème 10.9 – Résolution de $E_H, \mathbb{K} = \mathbb{R}$

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On associe à E_H l'équation caractéristique

$$(C) : aX^2 + bX + c = 0$$

dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$.

- Si $\Delta > 0$, on note $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ les deux racines réelles de (C) . Alors $y_H \in \mathcal{S}_H$ si et seulement si

$$y_H(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta = 0$, on note $r_0 = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{R}$ l'unique racine réelle de (C) . Alors $y_H \in \mathcal{S}_H$ si et seulement si

$$y_H(t) = (A + Bt)e^{r_0 t} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta < 0$, on note $r = \alpha + i\beta$ et $\bar{r} = \alpha - i\beta$ les deux racines complexes conjuguées de (C) avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $y_H \in \mathcal{S}_H$ si et seulement si

$$y_H(t) = e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)) \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

On notera que dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, toutes les solutions y_H sont à valeurs dans \mathbb{R} (noter que les variables $A, B, r_1, r_2, r, \alpha, \beta$ sont toutes réelles).

Exemple 8. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = 0$

Exemple 9. Résoudre $y'' + 4y' + 4y = 0$

Exemple 10. Résoudre $y'' + iy' + 2y = 0$

Exemple 11. Résoudre $y'' + 2y' + 5y = 0$

Étape 2 : solution particulière y_p

On cherche une solution particulière de

$$ay'' + by' + cy = d(t)$$

Au programme de MPSI, on ne traite que certains cas particuliers de fonctions d .

Méthode – Forme de y_p avec d exponentiel

Soit $q \in \mathbb{K}$. On cherche une solution particulière de

$$ay'' + by' + cy = e^{qt}$$

On définit le polynôme $P(X) := aX^2 + bX + c$

- Si q **n'est pas racine** de P , alors on cherche y_p sous la forme $y_p(t) = Ce^{qt}$, avec $C \in \mathbb{K}$ à déterminer.
- Si q est **racine simple** de P , alors on cherche y_p sous la forme $y_p(t) = Cte^{qt}$, avec $C \in \mathbb{K}$ à déterminer.
- Si q est **racine double** de P , alors on cherche y_p sous la forme $y_p(t) = Ct^2e^{qt}$, avec $C \in \mathbb{K}$ à déterminer.

Méthode – Forme de y_p avec d polynômial

Soit Q un polynôme. On cherche une solution particulière de

$$ay'' + by' + cy = Q(t)$$

On cherche y_p sous la forme $y_p(t) = R(t)$ où R est un polynôme à déterminer :

- Si $c \neq 0$, alors on cherche un polynôme R tel que $\deg R = \deg Q$.
- Si $c = 0$ et $b \neq 0$, alors on cherche un polynôme R tel que $\deg R = \deg Q + 1$.

Si $c = b = 0$, alors $ay'' = Q(t)$: on obtient R en intégrant deux fois $\frac{1}{a}Q$ (on aura $\deg R = \deg Q + 2$).

Étape 3 : solution générale de E

Comme pour l'ordre 1, une fois qu'on a déterminé une solution générale y_H de E_H (avec des constantes $A, B \in \mathbb{K}$) et une solution particulière y_p de E , alors $y_p + y_H$ est la solution générale de E .

Exemple 12. Résoudre $y'' + 4y' + 4y = x^2$.

On a vu que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y_H(x) = (A + Bx)e^{-2x} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Exemple 13. Résoudre $y'' + 4y' = 1$.

On peut montrer que les solutions de l'équation homogène sont

$$y_H(x) = A + Be^{-4x} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Exemple 14. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = e^{-x}$.

On a vu que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y_H(x) = Ae^{3x} + Be^x \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Exemple 15. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = e^x$.

On a vu que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y_H(x) = Ae^{3x} + Be^x \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

3.2 Principe de superposition

Théorème 10.10 – Principe de superposition

Soit $d_1, d_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$ des fonctions continues. On suppose que

$$y_1 : I \rightarrow \mathbb{K} \text{ est une solution de } \quad ay'' + by' + cy = d_1(t)$$

$$y_2 : I \rightarrow \mathbb{K} \text{ est une solution de } \quad ay'' + by' + cy = d_2(t)$$

Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\lambda y_1 + \mu y_2 \text{ est une solution de } \quad ay'' + by' + cy = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t)$$

Démonstration. On sait que

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = d_1(t) \quad \text{et} \quad ay_2'' + by_2' + cy_2 = d_2(t)$$

On multiplie la première ligne par λ , la seconde par μ , et on les additionne. On obtient alors

$$a(\lambda y_1'' + \mu y_2'') + b(\lambda y_1' + \mu y_2') + c(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t)$$

d'où

$$a(\lambda y_1 + \mu y_2)'' + b(\lambda y_1 + \mu y_2)' + c(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t)$$

et donc $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de l'équation ayant $\lambda d_1(t) + \mu d_2(t)$ pour second membre. \square

Le principe de superposition se généralise à des ED linéaires de tout ordre, mais pour cette année, il est suffisant de le voir pour l'ordre 2. Grâce au principe de superposition, on peut traiter des cas de fonctions d plus variés.

Exemple 16. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = \operatorname{sh}x$.

On a vu que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y_H(x) = Ae^{3x} + Be^x \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Par ailleurs, on a vu que

$$x \mapsto -\frac{1}{2}xe^x \text{ est solution de } y'' - 4y' + 3y = e^x$$

$$x \mapsto \frac{1}{8}e^{-x} \text{ est solution de } y'' - 4y' + 3y = e^{-x}$$

Comme $\operatorname{sh}x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$, on en déduit que

$$y_p(x) = -\frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{2} \times \frac{1}{8}e^{-x}$$

est solution particulière. Ainsi, les solutions de l'équation sont les fonctions

$$y(x) = -\frac{1}{4} \left(xe^x + \frac{1}{4}e^{-x} \right) + Ae^{3x} + Be^x \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

3.3 Conditions initiales

Définition 10.11 – Problème de Cauchy (ordre 2)

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$, $d : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue et $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Le système

$$(PC) : \begin{cases} ay'' + by' + cy = d(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

est appelé un problème de Cauchy (linéaire, d'ordre 2, à coefficients constants).

Théorème 10.12 – Théorème de Cauchy-Lipschitz (ordre 2)

Pour chaque triplet $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy (PC) admet une unique solution $y : I \rightarrow \mathbb{K}$.

Comme pour l'ordre 1, pour résoudre un problème de Cauchy, on trouve d'abord la solution générale de l'équation (qui dépend de deux constantes $A, B \in \mathbb{K}$). Puis on détermine quelle (unique) valeur du couple (A, B) permet de vérifier les conditions initiales. À l'ordre 2, comme il y a deux constantes, il faut une condition sur $y(t_0)$ et une sur $y'(t_0)$.

Exemple 17. Résoudre le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

On a vu à l'exemple 15 que les solutions de l'équation $y'' - 4y' + 3y = e^x$ sont les fonctions

$$y(x) = -\frac{1}{2}xe^x + Ae^{3x} + Be^x \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Vérifions les conditions initiales :

$$y(0) = A + B$$

$$y'(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}xe^x + 3Ae^{3x} + Be^x \implies y'(0) = -\frac{1}{2} + 3A + B$$

Ainsi, on doit résoudre

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + B - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B = -A \\ 2A - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Finalement, la solution du problème de Cauchy est

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{4}e^{3x} + \frac{1}{4}e^x \\ &= \frac{1}{4}e^x(-2x + e^{2x} + 1) \end{aligned}$$

4 Compléments

4.1 Une conséquence de Cauchy-Lipschitz (ordre 1)

On considère l'ED linéaire d'ordre 1

$$y' + a(t)y = b(t)$$

avec $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues.

Théorème 10.13

Soit y_1, y_2 deux solutions de $y' + a(t)y = b(t)$. S'il existe $t_0 \in I$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$, alors $y_1 = y_2$ sur I .

Autrement dit, si deux solutions d'un même problème de Cauchy sont égales en un point, elles sont égales en tout point.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{K}$ la valeur telle que $y_1(t_0) = y_2(t_0) = z$. Alors y_1, y_2 sont solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = z \end{cases}$$

Or, la solution de ce problème est unique par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Ainsi, $y_1 = y_2$. □

4.2 Les “astuces” des physiciens... (HORS PROGRAMME)

Pour résoudre des ED, nos amis les physiciens emploient parfois des méthodes “aventureuses” pour un matheux... La méthode physicienne décrite ci-dessous ne doit PAS être écrite sur une copie de maths. Néanmoins, elle admet un équivalent mathématique rigoureux, si bien qu’elle conduit au bon résultat.

On considère l’ED définie sur $I = \mathbb{R}_+$

$$y' = -a(t)y$$

Les physiciens cherchent les solutions y qui sont strictement positives, c’est-à-dire telles que $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad y(t) > 0$.

Version physicienne	Version mathématique	
$\frac{dy}{dt} = -a(t)y$	$y' = -a(t)y$	
$\frac{dy}{y} = -a(t)dt$	$\frac{y'(t)}{y(t)} = -a(t)$	$y(t) \neq 0$ pour tout t donc on peut diviser par $y(t)$
$\int \frac{dy}{y} = - \int a(t)dt$	$\int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)} ds = - \int_0^t a(s)ds$	On intègre entre 0 et t des fonctions continues
	$[\ln y(s)]_0^t = -[A(s)]_0^t$	
	$\ln y(t) - \ln y(0) = -A(t) + A(0)$	$ y(t) = y(t) \quad \text{et} \quad y(0) = y(0)$
$\ln y = -A(t) + K$	$\ln y(t) = -A(t) + K$	avec $K := \ln y(0) + A(0)$
	$y(t) = e^K e^{-A(t)}$	
	$y(t) = C e^{-A(t)}$	avec $C := e^K > 0$

On trouve ainsi toutes les solutions strictement positives de $y' + a(t)y = 0$

4.3 ED d’ordre 1 non résolue : $a_1(t)y' + a_0(t)y = b_0(t)$

On considère une ED d’ordre 1 sous forme non résolue $a_1(t)y' + a_0(t)y = b_0(t)$ définie sur un intervalle d’étude I . Si a_1 ne s’annule pas sur I , alors en divisant l’équation par $a_1(t)$ on se ramène à une forme résolue. Par contre, si a_1 s’annule en un (par exemple) unique point $t_0 \in I$, on résout l’équation sur chaque intervalle de l’ensemble $I \setminus \{t_0\}$: notons-les I_1 et I_2 . La fonction a_1 ne s’annule pas sur ces intervalles, on peut donc résoudre l’équation sur I_1 puis sur I_2 :

- On détermine une solution générale y_1 sur I_1 qui dépend d’une constante C_1 .
- On détermine une solution générale y_2 sur I_2 qui dépend d’une constante C_2 .

Toute solution y définie sur I tout entier doit alors nécessairement vérifier

$$\begin{cases} y(t) = y_1(t) & \text{pour tout } t \in I_1 \\ y(t) = y_2(t) & \text{pour tout } t \in I_2 \\ a_0(t_0)y(t_0) = b_0(t_0) \end{cases}$$

La dernière équation est obtenue en évaluant l’ED en t_0 et du fait que $a_1(t_0) = 0$. *Cependant*, pour que y soit véritablement une solution de l’ED, il faut choisir C_1 et C_2 de sorte que y soit continue et dérivable en t_0 (si cela

est possible). Cela s'appelle **raccorder** la solution.

Enfin, si a_1 s'annule en plusieurs points $t_0, t_1, \dots, t_n \in I$, on doit raccorder la solution en chacun de ses points.

5 Méthodes pour les exercices

Si on exclut les problèmes de raccord, la résolution d'équations différentielles en MPSI suit une méthode très "linéaire" (!) :

Méthode – Résolution d'une ED linéaire

0. On détermine \mathbb{K} (sans l'écrire) et un intervalle d'étude I (qu'on écrit).
1. On trouve une **solution générale**, notée y_H , **de l'équation homogène** (E_H).
 - Si (E_H) est d'ordre 1, donc de la forme $y' + a(t)y = 0$, alors on intègre la fonction a et on applique la formule du théorème 10.5.
 - Si (E_H) est d'ordre 2, donc de la forme $ay'' + by' + cy = 0$, on applique les formules des théorèmes 10.8 et 10.9.
2. On trouve une **solution particulière**, notée y_p , de l'équation (E). Une seule suffit !
 - On peut d'abord chercher une solution évidente.
 - Sinon, si (E) est d'ordre 1, on utilise la **variation de la constante**.
 - Si par contre (E) est d'ordre 2, donc de la forme $ay'' + by' + cy = d$, on cherche y_p sous une **forme "similaire"** à d .
(deux formes de d sont au programme : les polynômes et les fonctions de la forme $d(t) = e^{qt}$)
 - Enfin, le **principe de superposition** est utile notamment pour l'ordre 2, afin de décomposer le calcul de solutions particulières.
3. On forme la solution (générale) de l'équation (E) en additionnant y_p et y_H .
 - Cette solution dépendra d'une constante $C \in \mathbb{K}$ (si ordre 1) ou de deux constantes $A, B \in \mathbb{K}$ (si ordre 2).
4. S'il y a une ou plusieurs **conditions initiales** à vérifier, on cherche les valeurs de A, B, C qui permettent de les vérifier.