Chapitre 9

Primitives, intégrales

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial.
De plus, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: dans chaque résultat, on peut ou bien remplacer tous les $\mathbb{K}$ par $\mathbb{R}$ ou bien remplacer tous les $\mathbb{K}$ par $\mathbb{C}$.

1 Primitives

Voici tout d'abord un théorème préliminaire :

Théorème 9.1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable. f est constante sur I si et seulement si $f' \equiv 0$ sur I.

Démonstration. On a vu la démonstration pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ au chapitre précédent. Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Le sens direct est évident. Pour le sens réciproque, on suppose donc que f' est nulle. On rappelle que $f = \mathrm{Re} f + i \,\mathrm{Im} f$, donc pour tout $x \in I$, on a

$$(\mathrm{Re} f)'(x) + i\,(\mathrm{Im} f)'(x) = 0$$

d'où, en égalisant partie réelle et partie imaginaire, on en déduit que $(\mathrm{Re} f)' \equiv 0$ et $(\mathrm{Im} f)' \equiv 0$. Comme $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, on en déduit (par la version $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ de ce théorème), que $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont constantes. Ainsi, $f = \mathrm{Re} f + i \,\mathrm{Im} f$ est constante. $\square$

Remarque. L'hypothèse "I intervalle" est essentielle. Si on définit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

alors on montre facilement que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $f' \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^*$. Pourtant, f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$.

1.1 Primitive sur un intervalle

Définition 9.2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction. On appelle primitive de f (sur I) toute fonction $F : I \to \mathbb{K}$ dérivable sur I telle que $F' = f$.

Attention, il n'y a pas unicité de la primitive de f :

Théorème 9.3

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Si F est une primitive de f sur I, alors toutes les primitives de f sur I sont exactement les fonctions de la forme

$$x \mapsto F(x) + C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{K}$$

En d'autres termes, une fonction G est une primitive de f si et seulement si $F - G$ est constante sur I.

Une telle constante C est souvent appelée constante d'intégration.

Démonstration. Il suffit de montrer l'équivalence de la dernière assertion.

- Sens direct : si G est une primitive de f sur I, alors

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$$

  et comme I est un **intervalle**, on en déduit que $F - G$ est constante.
- Sens réciproque : on suppose que $F - G$ est constante. Donc il existe $K \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in I$, $(F - G)(x) = K$. En particulier, on a $G(x) = F(x) - K$. Ainsi, la fonction G est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables, et

$$G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$$

  La fonction G est donc bien une primitive de f sur I.

$\square$

Exemple 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Toutes les primitives de $x \mapsto x^n$ sur $I = \mathbb{R}$ sont les fonctions
- Toutes les primitives de $x \mapsto x^{-1}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions
- Toutes les primitives de $x \mapsto x^{-1}$ sur $I = \mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions

1.2 Primitive sur une partie de $\mathbb{R}$ quelconque

Par extension, si D est une partie quelconque de $\mathbb{R}$ (par nécessairement un intervalle), on appelle primitive de f (sur D) toute fonction $F : D \to \mathbb{K}$ dérivable telle que $F' = f$.

Remarque. Si on cherche toutes les primitives de f sur un ensemble D qui n'est pas un intervalle, il faut rajouter une constante d'intégration a priori différente sur chaque intervalle de D.

Exemple 2. Les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $D = \mathbb{R}^*$ sont les fonctions F de la forme

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{K}$$

1.3 Primitives usuelles

Un formulaire sur les primitives usuelles est disponible sur le site.

2 Lien entre primitives et intégrale

2.1 Définition de l'intégrale

On donne ici une définition informelle d'intégrale, pour une fonction continue :

Définition 9.4

Soit $a, b \in I$ tels que $a < b$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note

$$\int_a^b f(x)dx$$

l'aire (avec un signe) que fait la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

On verra ultérieurement une définition de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{C}$. On ne détaillera pas ici comment on calcule précisément cette aire. On le verra ultérieurement dans le chapitre d'intégration.

Exemple 3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On a $\displaystyle\int_a^b 1dx = \ldots\ldots\ldots$ et $\displaystyle\int_a^b 0dx = \ldots\ldots\ldots$

Remarque. Par convention, si $a = b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$

De plus, si $b < a$, alors on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

Notation. La variable selon laquelle on intègre, ici x, est muette :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(@)d@ = (\dots)$$

En particulier $\int_a^b f(x)dx$ **ne dépend pas de** x. Il existe ainsi une notation alternative :

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)dx$$

2.2 Le théorème fondamental de l'analyse

Le théorème qui suit est le résultat le plus important du chapitre (ultérieur) d'intégration. C'est dans ce chapitre qu'on en fera la démonstration, ainsi que la construction précise de l'intégrale.

Théorème 9.5 – Théorème Fondamental de l'Analyse (TFA)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I, et $a \in I$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

est *l'unique* primitive de f qui s'annule en a.

La fonction F est donc l'unique fonction (dérivable) qui vérifie $F' = f$ et $F(a) = 0$.

Exemple 4. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$. En posant $a = 1$, on peut définir pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\ln x := \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

La fonction ln est ainsi définie comme étant l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

Remarque. Par la propriété 9.3, toutes les primitives de f sur I sont de la forme

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt + C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{K}$$

Ainsi, pour tous $a, a' \in I$, les fonctions $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ et $x \mapsto \int_{a'}^x f(t)dt$ ne diffèrent que d'une constante.

Notation. Il arrive qu'on note

$$\int^x f(t)dt \qquad \text{ou} \qquad \int^x f$$

pour désigner $F(x)$, avec F une primitive quelconque de f. Toutefois, cette expression n'est définie qu'à constante près, et donc on n'utilisera cette notation que lorsqu'on cherchera une primitive quelconque de f.

Exemple 5. On peut écrire $\displaystyle\int^x \cos(t)dt = \sin x$ pour signifier que $x \mapsto \sin x$ est une primitive de cos. Mais on pourrait aussi écrire $\displaystyle\int^x \cos(t)dt = \sin x + 3$ ...

2.3 Un premier corollaire du TFA

Le TFA permet de faire le lien entre les primitives et le calcul d'intégrale (i.e. l'aire sous la courbe). On peut en déduire de nombreuses conséquences !

Corollaire 9.6

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I, et F une primitive *quelconque* de f sur I. Alors

$$\forall a, b \in I \qquad \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Notation. On note

$$\left[F(t)\right]_a^b := F(b) - F(a) \qquad \text{ou encore} \qquad \left[F\right]_a^b := F(b) - F(a)$$

de sorte que le corollaire ci-dessus se réécrit : $\displaystyle\int_a^b F'(t)dt = \left[F(t)\right]_a^b$

□

Remarque 1. Le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \left[F(x)\right]_a^b$ ne dépend pas de la primitive F qu'on choisit : si G est une autre primitive de f, alors $\left[G(x)\right]_a^b = \left[F(x)\right]_a^b$, puisque G et F sont égales à constante près.

2.4 Remarques sur le TFA et son premier corollaire

Le TFA et le Corollaire 9.6 mettent en évidence le lien très fort entre primitives et intégrales :

- **(Intégrale / aire $\to$ Primitive)** Si pour tout $x \in I$, on sait calculer l'aire $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$, alors par le théorème fondamental, on connait une primitive F de f sur I. Ainsi, *toutes* les primitives de f sur I sont les fonctions

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt + C \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{K}$$

- **(Primitive $\to$ Intégrale / aire)** Si on connait une primitive de f sur I, le corollaire 9.6 permet de calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Outre ces deux aspects, le théorème fondamental a aussi une utilité plus théorique :

Corollaire 9.7

Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.
En outre, pour tout $a \in I$, il y a une primitive et une seule qui s'annule en a.

2.5 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 9.8 – Fonction de classe $\mathscr{C}^1$

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ si f est dérivable (sur I) ET si sa dérivée f' est continue (sur I).

Une fonction dérivable n'est pas toujours de classe $\mathscr{C}^1$, comme le montre l'exemple suivant (démontré au TD 7–8).

Exemple 6. On pose $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.
Voici une réécriture du corollaire 9.6 qui sert également en pratique :

Corollaire 9.9

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Alors

$$\forall a, b \in I \qquad f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$$

Démonstration. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction f' est continue sur I. De plus f est clairement une primitive de f' sur I. On vérifie donc les hypothèses du corollaire 9.6 pour la fonction f', ce qui donne le résultat. □

3 Calcul pratique d'intégrales

3.1 Reconnaitre une primitive

Si on connait une primitive de la fonction à intégrer, alors le corollaire 9.6 du TFA permet de conclure. *Dans les exercices, on peut appliquer directement la formule $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ sans rappeler les hypothèses sur f.*

Exemple 7. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$.

Théorème 9.10 – Primitives en fonction de u, u'

Soit $u : I \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable sur I.

- Pour tous $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto u'(ax+b)$ admet pour primitive $x \mapsto \frac{1}{a}u(ax+b)$.
- La fonction $u'e^u$ admet pour primitive e^u.
- La fonction $\frac{u'}{u}$ admet pour primitive $\ln|u|$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, la fonction $u'u^\alpha$ admet pour primitive $\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$.

Exemple 8. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $\int_0^\pi \cos(kt)dt$.

Exemple 9. Calculer $\int_1^2 \frac{1}{(4x+1)^3}dx$.

Exemple 10. Calculer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f : x \mapsto e^{x^2+\ln x}$.

Exemple 11. Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$.

3.2 Propriétés de l'intégrale

On rappelle quelques propriétés générales de l'intégrale.

Théorème 9.11

Soit f et g deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour tous $a, b \in I$, on a les propriétés suivantes :

1. **Linéarité de l'intégrale** : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\, dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

2. **Relation de Chasles** : soit $c \in I$. On a :

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$$

3. **Positivité** (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) : si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur $\left[a, b\right]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0$$

4. **Croissance** (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) : si $a \leq b$ et $f \leq g$ sur $\left[a, b\right]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

Démonstration. En passant par une primitive. Par exemple, pour Chasles, on introduit une primitive F de f sur I. Alors :

$$\int_a^c f(t) dt = F(c) - F(a) = F(c) - F(b) + F(b) - F(a) = \int_b^c f(t) dt + \int_a^b f(t)$$

□

Remarque (Linéarité du crochet)**.** L'intégrale est donc linéaire, et il en va de même du "crochet" d'intégration :

$$[\lambda f(x) + \mu g(x)]_a^b = \lambda\, [f(x)]_a^b + \mu\, [g(x)]_a^b$$

3.3 Intégration par parties

Théorème 9.12 – IPP

Soit u, v de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et $a, b \in I$. Alors

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

$\square$

Remarque. Dans le programme, il est explicitement mentionné que pour appliquer l'intégration par parties, on ne demande pas de rappeler les hypothèses que u, v soient de classe $\mathscr{C}^1$. Mais il est toujours bon de le vérifier mentalement.

Cette formule permet de remplacer une fonction par sa dérivée. Elle est particulièrement adaptée pour les fonctions "compliquées" dont la dérivée est simple.

Exemple 12. Déterminer une primitive de ln (sur $\mathbb{R}_+^*$).

3.4 Changement de variables, méthode

Dans cette section, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on définit la notation (non officielle) suivante :

$$\langle a, b \rangle := \left[\min(a,b), \max(a,b)\right] = \begin{cases} [a,b] & \text{si } a \leq b \\ [b,a] & \text{si } b \leq a \end{cases}$$

Autrement dit, $\langle a, b\rangle$ désigne l'intervalle de $\mathbb{R}$ ayant pour bornes a et b.

Théorème 9.13

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue, et $\varphi : \langle a, b\rangle \to I$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Alors :

$$\int_a^b (f\circ\varphi)(x)\times\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. La fonction $(f\circ\varphi)\times\varphi'$ est la dérivée de $F\circ\varphi$ et est continue sur $\left[a, b\right]$ car $f\circ\varphi$ et φ' le sont. Par le TFA,

$$\begin{aligned}\int_a^b (f\circ\varphi)(x)\varphi'(x)dx &= [(F\circ\varphi)(x)]_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= [F(u)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du\end{aligned}$$

$\square$

Supposons qu'on ait à calculer une intégrale de la forme $\int_{\dots}^{\dots} \dots dx$. La technique de changement de variable peut s'utiliser de deux façons :

- ou bien on pose $u = \varphi(x)$, donc la nouvelle variable en fonction de l'ancienne. Cela donne :

$$\int_a^b (f\circ\varphi)(x)\times\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

- ou bien on pose $x = \varphi(t)$, donc l'ancienne variable en fonction de la nouvelle. Cela donne :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b (f\circ\varphi)(t)\times\varphi'(t)dt$$

Méthode – Changement de variable $u = \varphi(x)$

Cette méthode n'est pas toujours applicable, il faut pouvoir réaliser l'étape 1 ci-dessous.

1. Par des réécritures, on s'arrange pour avoir une intégrale de la forme $\int_a^b f(\varphi(x))\times\varphi'(x)dx$
2. On change de variable : on **écrit** $u = \varphi(x)$, puis on fait les substitutions $\varphi(x) \to u$
3. Pour les infinitésimaux : on **écrit** $du = \varphi'(x)dx$, puis on fait la substitution $\varphi'(x)dx \to du$
4. On change les bornes : $\int_{x=a}^{x=b} \dots \to \int_{u=\varphi(a)}^{u=\varphi(b)} \dots$

On a donc $\int_a^b f(\varphi(x))\times\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$. Cf exemple 13.

Dans cette méthode, la difficulté réside dans l'étape 1, il faut que chaque x se retrouve au sein d'une expression $\varphi(x)$ ou $\varphi'(x)dx$, pas un seul x ne doit rester !

Méthode – Changement de variable $x = \varphi(t)$

Cette méthode peut s'appliquer à une intégrale quelconque, qu'on notera $\int_A^B h(x)dx$.

1. On trouve $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $A = \varphi(a)$ et $B = \varphi(b)$.
2. On change de variable : on **écrit** $x = \varphi(t)$, puis on fait les substitutions $x \to \varphi(t)$
3. Pour les infinitésimaux : on **écrit** $dx = \varphi'(t)dt$, puis on fait la substitution $dx \to \varphi'(t)dt$.
4. On change les bornes : $\int_{x=A=\varphi(a)}^{x=B=\varphi(b)} \ldots \to \int_{t=a}^{t=b} \ldots$

On a donc $\int_A^B h(x)dx = \int_a^b h(\psi(t)) \times \psi'(t)\,dt$. Cf exemple 14.

Ici encore, la difficulté réside dans l'étape 1. Il faut notamment trouver les valeurs a et b telles que $A = \varphi(a)$ et $B = \varphi(b)$, et vérifier que φ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout l'intervalle $\langle a, b\rangle$.

Quelques remarques :

- Dans les deux cas, il ne faut jamais mélanger les variables x, u, v dans une même intégrale.
- Dans les deux cas, il faut vérifier que φ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\langle a, b\rangle$.

Pour bien maitriser le changement de variable, il faut absolument **s'entrainer** à faire des **exercices**.

3.5 Changement de variables, exemples et conséquences

Exemple 13. Calculer l'intégrale $\mathcal{I} = \int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx$.

Exemple 14. Calculer l'intégrale $\mathcal{I} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

Exemple 15 (Un changement de variables incorrect)**.** Voici un exemple FAUX de changement de variables :

$$\int_{-3}^{3} x^2 dx \qquad \begin{cases} u = x^2 & du = 2xdx \\ x = \sqrt{u} & dx = \dfrac{du}{2x} = \dfrac{du}{2\sqrt{u}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{(-3)^2}^{3^2} u \frac{du}{2\sqrt{u}} \\ &= \int_{9}^{9} \frac{\sqrt{u}}{2} du \\ &= 0 \qquad (!!) \end{aligned}$$

Ceci alors que, clairement, $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2 dx > 0$. Où est l'erreur ? En réalité, on a mélangé les deux types de changements de variables...

- On pourrait dire qu'on a posé $u = \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = x^2$: c'est pour ça qu'on aurait changé les bornes -3 et 3 en $\varphi(-3) = \varphi(3) = 9$. Or, on remarque que

  $$x^2 dx = \varphi(x) dx$$

  et donc il manque un $\varphi'(x)$ pour se combiner avec dx. En réalité, ce changement de variables ne correspond par au type $u = \varphi(x)$, mais à l'autre sens :
- On pourrait dire qu'on a posé $x = \varphi(u)$ avec $\varphi(u) = \sqrt{u}$. On a donc

  $$x^2 dx = \varphi(u)^2 \varphi'(u) du = ... = \frac{1}{2}\sqrt{u} du$$

  Toutefois, les bornes posent problème : il faudrait trouver a, b tels que $-3 = \varphi(a)$ et $3 = \varphi(b)$. Or, pour $\varphi(a) = -3$, c'est impossible.

Remarque. On peut utiliser le changement de variables avec la notation $\int^x f(t)dt$, ce qui donne :

$$\int^x f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int^{\varphi(x)} f(u)du$$

Théorème 9.14

Soit $a \geq 0$ et f une fonction continue.

- Si $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.
- Si $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique, alors pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a $\int_b^{b+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

Démonstration. On ne fait la preuve que du résultat pour f impaire.

$\square$

3.6 Primitives et intégrales de fonctions complexes

Définition 9.15

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Si f est continue, alors $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ le sont aussi et on définit l'intégrale de f par :

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt$$

En d'autres termes,

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt$$

Ainsi, tout se passe comme si le nombre *i* est une constante.

Exemple 16. Calculer l'intégrale $\mathcal{I} = \int_0^{\pi} (x + ix^2)dx$.

Ceci permet de donner un sens à toutes les notions vues plus haut lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3.7 Méthodes de calcul à connaitre

Méthode – Intégrales des fonctions $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Pour calculer $\int_a^b e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, on écrit

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx &= \int_a^b e^{\alpha x}\mathrm{Re}\left(e^{i\beta x}\right)dx \\
&= \mathrm{Re}\left(\int_a^b e^{\alpha x + i\beta x}dx\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{\alpha + i\beta}e^{(\alpha+i\beta)x}\right]_a^b\right) = \dots
\end{aligned}$$

et de même pour $\int_a^b e^{\alpha x}\sin(\beta x)dx$.

Exemple 17. Calculer l'intégrale $\mathcal{I} = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin(4x)dx$.

Méthode – Intégrales des fonctions $\cos^n x$ et $\sin^n x$

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. On souhaite calculer $\int_a^b \cos^m x \sin^n x \, dx$.

- Si m est impair, donc $m = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$, on écrit

$$\cos^m x = (\cos^2 x)^p \times \cos x = (1-\sin^2 x)^p \times \cos x$$

  et on fait le changement de variables $u = \sin x$.
- Si n est impair, donc $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$, on écrit

$$\sin^n x = (\sin^2 x)^p \times \sin x = (1-\cos^2 x)^p \times \sin x$$

  et on fait le changement de variables $u = \cos x$.
- Si m et n sont tous les deux pairs, on utilise la méthode de *linéarisation* (chapitre 4) qui permet d'exprimer $\cos^n t$ et $\sin^m t$ en somme de $\cos(kt)$; il n'y aura pas de $\sin(kt)$ car m, n sont pairs.

On notera que pour calculer $\int_a^b \cos^2 x \, dx$ et $\int_a^b \sin^2 x \, dx$, il suffit d'appliquer les formules $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ et $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$.

Exemple 18. Calculer l'intégrale $\mathcal{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^4 x \, dx$.

Exemple 19. Calculer l'intégrale $\mathcal{I} = \int_0^{\pi} \cos^4 t \, dt$.

Remarque. Les intégrales de la forme $\int_a^b \cos t \, \sin^n t \, dt$ et $\int_a^b \sin t \, \cos^n t \, dt$ sont de la forme $u'u^n$ et peuvent donc s'intégrer directement.

Dans la suite, on considère $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $P : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2. On cherche à calculer

$$\int_A^B \frac{1}{P(x)} dx$$

avec $A < B$ deux réels. On suppose que P ne s'annule pas sur $[A, B]$, donc la fonction $\frac{1}{P}$ sera continue sur $[A, B]$, de sorte que $\int_A^B \frac{1}{P(x)} dx$ a un sens.

Méthode – Intégrale de $\dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$

1. Si P admet une racine double $r \in \mathbb{R}$, on a donc $P(x) = a(x - r)^2$. Alors, on peut intégrer directement :

$$\int_A^B \frac{1}{a(x-r)^2} dx = \left[\frac{-1}{a(x-r)} \right]_A^B$$

2. Si P admet deux racines distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, on a donc $P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$. Alors, on trouve des coefficients $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in [A, B] \qquad \frac{1}{(x - r_1)(x - r_2)} = \frac{c_1}{x - r_1} + \frac{c_2}{x - r_2}$$

   et on termine en remarquant que $\displaystyle\int_A^B \frac{c_i}{x - r_i} dx = \Big[c_i \ln |x - r_i| \Big]_A^B$

3. Si P n'admet aucune racine réelle, on le met sous la forme canonique $P(x) = a\left((x + \beta)^2 + \gamma^2\right)$ avec $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $\gamma \neq 0$. Alors on obtient

$$\int_A^B \frac{1}{a\left((x+\beta)^2 + \gamma^2\right)} dx \quad = \quad \frac{1}{a\gamma^2} \int_A^B \frac{1}{\frac{1}{\gamma^2}(x+\beta)^2 + 1} dx \quad = \quad \frac{1}{a\gamma} \left[\arctan\left(\frac{1}{\gamma}(x + \beta) \right) \right]_A^B$$

Exemple 20. Calculer l'intégrale $\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4x^2+4x+1}dx$.

Exemple 21. Calculer l'intégrale $\mathcal{I}_2 = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+x-2}dx$.

Exemple 22. Calculer l'intégrale $\mathcal{I}_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx$.

4 Méthodes pour les exercices

Le calcul d'intégrales peut faire intervenir de nombreuses techniques différentes, qui peuvent être combinées.

- **La relation de Chasles** est utile pour traiter des fonctions dont l'expression nécessite de distinguer deux cas ou plus.
$$\int_{-1}^{1} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx$$
- **La parité ou la périodicité** mènent parfois à des raccourcis salvateurs.
$$\int_{-\pi}^{\pi} \arctan x\,dx = 0$$
- **Reconnaitre une primitive** nécessite de la pratique. Notamment, il faut pouvoir reconnaitre des fonctions de la forme $u'u^{\alpha}$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) et les intégrer. En pratique, au brouillon on écrit la forme générale et on se ramène à la forme exacte en tâtonnant.
$$\int_{a}^{b} \frac{x}{(x^2+1)^n}\,dx = \ldots$$
- **L'intégration par parties** est utile lorsqu'une fonction a une expression "compliquée" mais que sa dérivée est simple. Si on ne dispose que d'une fonction, on peut considérer que la seconde est $x \mapsto 1$, cf exemple 12.
- Parfois, il faut intégrer par parties plusieurs fois d'affilée. Cela permet de traiter des intégrales du type
$$\int_{a}^{b} x^n e^x\,dx \qquad \int_{a}^{b} x^n \cos x\,dx \qquad \int_{a}^{b} x^n \sin x \qquad \ldots$$
- **Le changement de variables** est très efficace... à condition de faire la bonne transformation. Il existe différentes techniques selon la forme de l'intégrale à calculer.
- Enfin, d'autres petites techniques permettent de simplifier des calculs. On peut mentionner les stratégies "$+1-1$", l'utilisation de formules de trigonométrie, le passage aux complexes par les formules d'Euler...