Chapitre 8

Fonctions usuelles

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans ce chapitre, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ non triviaux (i.e. non vides et non singletons).

1 Complément sur les fonctions réciproques

1.1 Dérivée de f^{-1}

Théorème 8.1 – Dérivée de f^{-1}

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective, donc elle admet une réciproque $f^{-1} : J \to I$.

1. Pour tout $y \in J$, la fonction f^{-1} est dérivable en y si et seulement si f est dérivable en $f^{-1}(y)$ et $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. Lorsque cela est vérifié, on a :
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$
2. Plus généralement, si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Démonstration. Admis pour le moment. □

1.2 Théorème de la bijection monotone

On a vu que $f : E \to F$ est surjective ssi $F = f(E)$. Donc si $f : I \to J$ est bijective, alors nécessairement $J = f(I)$.

Théorème 8.2 – Théorème de la bijection monotone

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application **continue** et **strictement monotone** (sur I). Alors :

- L'ensemble $f(I)$ est un intervalle.
- f est une bijection de I sur $f(I)$.
- La fonction $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et a la même monotonie (stricte) que f.

Démonstration. Admis pour le moment □

Remarque. Soit $x \in I$ et $y \in f(I)$. En remarquant que
$$(x,y) \in \mathscr{C}_f \iff y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \iff (y,x) \in \mathscr{C}_{f^{-1}}$$
En particulier, la courbe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ se déduit de la courbe $\mathscr{C}_f$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2 Logarithme et exponentielle

2.1 Logarithme

Théorème 8.3 – Logarithme népérien

La fonction logarithme népérien, notée ln, est définie comme étant l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ et qui s'annule en 1.

La preuve s'appuie sur des notions que l'on précisera dans le chapitre de primitives et d'intégration qui va suivre. On la donne ici par souci d'exhaustivité.

Démonstration. On pose $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par le théorème fondamental de l'analyse, f admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, si F est une primitive de f, toutes les primitives de f sont de la forme

$$G_\alpha : x \mapsto F(x) + \alpha \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

En posant $\overline{\alpha} = -F(1)$, on voit que $G_{\overline{\alpha}}$ est une primitive de f qui s'annule en 1 car $G_{\overline{\alpha}}(1) = F(1) - F(1) = 0$. De plus, on vérifie facilement que si $\alpha \neq \overline{\alpha}$, alors $G_\alpha(1) \neq 0$. Finalement, il existe bien une et une seule primitive de f qui s'annule en 1. On peut donc poser librement $\ln := G_{\overline{\alpha}}$. □

Théorème 8.4

- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$ (on précisera qui est e plus loin).
- ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

  ln est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 8.5 – Propriétés algébriques de ln

Soit $a, b > 0$.

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$$

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \ln(a^n) = n \ln a$$

Démonstration. On ne montre que la propriété encadrée (dite fondamentale), le reste s'en déduit aisément.

□

Théorème 8.6

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

Définition 8.7 – Logarithme en base a

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle logarithme en base a, noté $\log_a$, la fonction définie par :

$$\log_a : x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$$

En particulier, on a $\log_a(a) = 1$.
En physique ou en SI, on emploie surtout la fonction $\log_{10}$, tandis qu'en informatique c'est $\log_2$.

2.2 Exponentielle

ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.

Définition 8.8

La fonction exponentielle, notée exp, est définie comme étant la réciproque de la fonction ln. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on notera $e^x := \exp(x)$.

La fonction exp réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Les courbes représentatives de exp et de ln sont donc symétriques l'une de l'autre.

Théorème 8.9

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \qquad y = e^x \iff x = \ln y$$

$$\forall x > 0 \quad e^{\ln x} = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \ln e^x = x$$

- $e^0 = 1$
- exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp'(x) = \exp(x) > 0$$

exp est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. On ne montre que la dernière assertion.

□

Théorème 8.10 – Propriétés algébriques de exp

Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{e^{x+y} = e^x e^y}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad \text{et} \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad (e^x)^n = e^{nx}$$

Démonstration. En utilisant les propriétés de la fonction ln. □

Théorème 8.11

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Définition 8.12

On note $\underline{e := \exp(1)}$. Le réel e est appelé nombre d'Euler ou constante de Néper.

On notera que, grâce à la propriété fondamentale, la notation $e^x = \exp(x)$ est cohérente avec celle du nombre e mis à la puissance x : par exemple :

$$e^2 = \exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1) \times \exp(1) = e \times e$$

C'est en fait pour cette raison qu'on utilise la notation e^x.

3 Puissance

On s'intéresse tout d'abord à la fonction $x \mapsto x^\alpha$ avec (dans le cas le plus général) $\alpha \in \mathbb{R}$. Selon la valeur de α, on définira cette fonction différemment.

3.1 Puissance entière

Définition 8.13 – $x \mapsto x^m$

Soit $m \in \mathbb{Z}^*$. On définit la fonction puissance m par :

- Si $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^m = \underbrace{x \times \ldots \times x}_{m \text{ fois}} \end{aligned}$$

- Si $m \leq -1$,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^m = \frac{1}{x^{|m|}} \end{aligned}$$

Théorème 8.14

Soit $m \in \mathbb{Z}^*$. La fonction $f : x \mapsto x^m$ est dérivable et :

$$\forall x \in D_f \qquad f'(x) = mx^{m-1} \qquad \text{(avec la convention } 0^0 = 1)$$

3.2 Puissance rationnelle

- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto x^{2p+1}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. En particulier, f admet une réciproque :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{\frac{1}{2p+1}} = \sqrt[2p+1]{x} \end{aligned}$$

- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g : x \mapsto x^{2p}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. En particulier, $f\big|_{\mathbb{R}_+}$ admet une réciproque :

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^{\frac{1}{2p}} = \sqrt[2p]{x} \end{aligned}$$

Cela justifie la définition suivante.

Définition 8.15 – $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $n \in 2\mathbb{N}+1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\sqrt[n]{x}$ comme étant (l'unique) réel tel que $(\sqrt[n]{x})^n = x$.
- Si $n \in 2\mathbb{N}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $\sqrt[n]{x}$ comme étant (l'unique) réel positif tel que $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

Remarque. S'il est vrai que $\sqrt{x}$ n'a de sens que si $x \geq 0$, l'expression $\sqrt[3]{x}$ a un sens pour tout réel x !

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse maintenant à la dérivée de la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$. On exclut d'emblée le cas $n = 1$ qui est évident.

Théorème 8.16

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. La fonction $h : y \mapsto y^{\frac{1}{n}}$ est dérivable $\begin{cases} \text{sur } \mathbb{R}^* & \text{si } n \text{ est impair} \\ \text{sur } \mathbb{R}_+^* & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$. De plus, pour tout y en lequel h est dérivable, on a :

$$h'(y) = \frac{1}{n}\, y^{\frac{1}{n}-1}$$

Idée générale de la preuve. On fait une disjonction de cas selon la parité de n. Si $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors h est la réciproque de $f : x \mapsto x^{2p+1}$. En appliquant la propriété 8.1, on vérifie que h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $h'(y) = \dfrac{1}{n}\, y^{\frac{1}{n}+1}$. Si n est pair, on reprend le même cheminement pour aboutir au résultat voulu. □

Remarque. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on peut définir la fonction $F : x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ comme

$$F(x) = x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

On a donc $F = f \circ h$ avec $f : x \mapsto x^p$ et $h : x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$. Les ensembles de définitions et de dérivabilité de F sont à déterminer au cas par cas, selon la parité et le signe des entiers p et q . Cependant, pour tout x en lequel F est dérivable, on a encore :

$$F'(x) = \frac{p}{q}\, x^{\frac{p}{q}-1}$$

3.3 Puissance réelle

Définition 8.17 – $x \mapsto x^\alpha$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction

$$\begin{aligned} p_\alpha : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \boxed{x^\alpha := e^{\alpha \ln x}} \end{aligned}$$

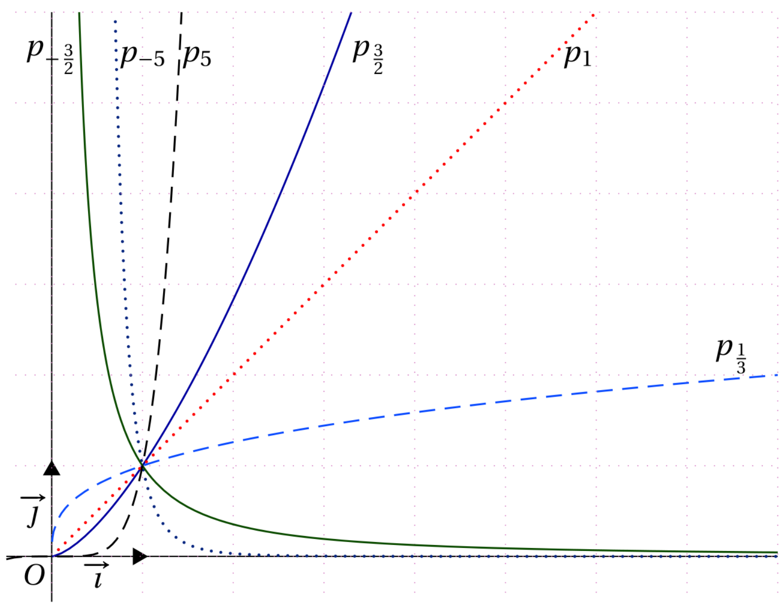
Sans plus d'informations sur α, la fonction p_α est a priori définie sur $\mathbb{R}_+^*$ pour que $\ln x$ ait un sens.

Remarque. Lorsque $\alpha \in \mathbb{Q}$, la fonction p_α coïncide (sur $\mathbb{R}_+^*$) avec les fonctions puissances vues précédemment.

Théorème 8.18 – Dérivée de f_α

p_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$p'_\alpha(x) = \frac{1}{x}\alpha e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha-1}$$



3.4 Fonction $x \mapsto a^x$

Définition 8.19

Pour tout $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on note

$$\boxed{a^x := e^{x \ln a}} > 0$$

Cette définition est cohérente avec la fonction exponentielle : lorsque $a = e$, en effet, $a^x := e^{x \ln e} = e^x$.

Théorème 8.20

Soit $a, b > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{a^x a^y = a^{x+y}}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$$

$$a^x b^x = (ab)^x$$

Démonstration. En utilisant la définition de a^x et les propriétés de l'exponentielle et du logarithme. □

4 Croissances comparées

Elles permettent de lever certaines formes indéterminées dans un calcul de limites.

Théorème 8.21 – Croissances comparées en $+\infty$

Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$$

Théorème 8.22 – Croissances comparées en $-\infty$ et 0

Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} |\ln x|^\beta x^\alpha = 0$$

On peut apprendre ces formules, mais il est plus intéressant de retenir ce principe général : lorsqu'on obtient une *forme indéterminée*[1] impliquant des fonctions de la forme $e^{\alpha x}$, x^β et $(\ln x)^\gamma$, la fonction exponentielle l'emporte sur la fonction puissance, qui l'emporte sur la fonction logarithme.

5 Fonctions circulaires

Théorème 8.23

Les fonctions sin et cos sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin'(x) = \cos x \qquad \text{et} \qquad \cos'(x) = -\sin x$$

1. Pour les croissances comparées, elles seront de la forme $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Rappel : la fonction tangente est définie sur

$$D_{\tan} := \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$$

Théorème 8.24

La fonction tan est continue et dérivable (sur son ensemble de définition $D_{\tan}$) et

$$\forall x \in D_{\tan} \qquad \tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

En particulier, tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = -\infty$$

Comme tan est π-périodique, la fonction tan est strictement croissante sur chaque intervalle inclus dans $D_{\tan}$ mais pas sur $D_{\tan}$ tout entier (ou même une réunion de deux de ces intervalles).

Pour conclure, on donne ici une écriture différente des formules trigonométrique de l'angle moitié :

Théorème 8.25

Soit $a \in D_{\tan}$, i.e. $a \in \mathbb{R}$ et $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

$$\cos(2a) = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} \qquad \sin(2a) = \frac{2\tan a}{1 + \tan^2 a} \qquad \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Pour la dernière formule, il faut également que $2a \in D_{\tan}$, i.e. $a \not\equiv \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$

6 Fonctions circulaires réciproques

6.1 Fonction arcsinus

La fonction sin est *continue* et *strictement croissante* sur *l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par le théorème de la bijection monotone, la fonction sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur l'intervalle $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$.

Définition 8.26 – arcsinus

La fonction arcsinus est la fonction réciproque de $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$. Elle est notée :

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1,1] &\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto \arcsin(x) \end{aligned}$$

Théorème 8.27 – Propriétés de arcsin

$$\forall y \in \left[-1,1\right] \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \qquad \arcsin(0) = 0 \qquad \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

arcsin est impaire.
arcsin est strictement croissante.
arcsin est continue sur $\left[-1,1\right]$.

On notera que les deux dernières assertions découlent du théorème de la bijection monotone.

Théorème 8.28 – Identités avec arcsin

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \arcsin(\sin(x)) = x$$

$$\forall y \in \left[-1,1\right] \qquad \sin(\arcsin(y)) = y$$

$$\forall y \in \left[-1,1\right] \qquad \cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2}$$

$$\text{arcsin est dérivable sur } \left]-1,1\right[\text{ et} \qquad \forall y \in \left]-1,1\right[\qquad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$\square$

Remarque. Attention, $\arcsin(\sin x)$ n'est pas toujours égal à x ! Par exemple, pour $x = \pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\arcsin(\sin \pi) = \arcsin(0) = 0 \neq \pi$$

6.2 Fonction arccosinus

La fonction cos est *continue* et *strictement décroissante* sur *l'intervalle* $[0, \pi]$. Par le théorème de la bijection monotone, la fonction cos réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur l'intervalle $\cos([0, \pi]) = \left[-1, 1\right]$.

Définition 8.29 – arccosinus

La fonction arccosinus, notée arccos, est la fonction réciproque de $\cos : \left[0, \pi\right] \to \left[-1, 1\right]$. On a donc

$$\begin{aligned} \arccos : \left[-1, 1\right] &\to \left[0, \pi\right] \\ x &\mapsto \arccos(x) \end{aligned}$$

Théorème 8.30 – Propriétés de arccos

$$\forall y \in \left[-1,1\right] \qquad 0 \leq \arccos y \leq \pi$$

$$\arccos(-1) = \pi \qquad\qquad \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad \arccos(1) = 0$$

arccos n'est ni paire ni impaire.
arccos est strictement décroissante.
arccos est continue sur $\left[-1,1\right]$.

On notera que les deux dernières assertions découlent du théorème de la bijection monotone.

Théorème 8.31 – Identités avec arccos

$$\forall x \in [0,\pi] \qquad \arccos(\cos x) = x$$

$$\forall y \in \left[-1,1\right] \qquad \cos(\arccos y) = y$$

$$\forall y \in \left[-1,1\right] \qquad \sin(\arccos y) = \sqrt{1-y^2}$$

arccos est dérivable sur $\left]-1,1\right[$ et $\quad \forall y \in \left]-1,1\right[\quad \arccos'(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

Démonstration. De même que pour arcsin, les deux premières assertions découlent du fait que arccos et $\cos\big|_{[0,\pi]}$ sont des fonctions réciproques l'une de l'autre. Pour la troisième assertion, on adapte la preuve précédente à arccos : le calcul montre que pour tout $y \in \left[-1,1\right]$,

$$|\sin(\arccos y)| = \sqrt{1-y^2}$$

Or, comme $\arccos y \in \left[0,\pi\right]$, on a $\sin(\arccos y) \geq 0$, d'où on a bien $\sin(\arccos y) = \sqrt{1-y^2}$. Pour la dernière assertion, on obtient de même que arccos est dérivable en tout $y \in \left]-1,1\right[$ et

$$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(\arccos y)} = -\frac{1}{\sin(\arccos y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

□

Remarque. Attention, $\arccos(\cos x)$ n'est pas toujours égal à x ! Par exemple pour $x = 2\pi \notin [0,\pi]$, on a

$$\arccos\left(\cos\left(2\pi\right)\right) = \arccos(1) = 0 \neq 2\pi$$

6.3 Fonction arctangente

La fonction tan est *continue* et *strictement croissante* sur *l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Par le théorème de la bijection monotone, la fonction tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur l'intervalle $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$.

Définition 8.32 – arctangente

La fonction arctangente, notée arctan, est la fonction réciproque de tan : $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$. On a donc

$$\begin{aligned}\arctan : \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto \arctan(x)\end{aligned}$$

Théorème 8.33 – Propriétés de arctan

$$\forall y\in\mathbb{R}\qquad -\frac{\pi}{2}<\arctan y<\frac{\pi}{2}$$

$$\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}\qquad\qquad \arctan(0)=0\qquad\qquad \arctan(1)=\frac{\pi}{4}$$

arctan est impaire.
arctan est strictement croissante.
arctan est continue sur $\mathbb{R}$.
On a une limite finie de arctan en $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan(x)=-\frac{\pi}{2}\qquad\text{et}\qquad\lim_{x\to+\infty}\arctan(x)=\frac{\pi}{2}$$

Théorème 8.34 – Identités avec arctan

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\qquad \arctan(\tan(x))=x$$

$$\forall y\in\mathbb{R}\qquad \tan(\arctan(y))=y$$

arctan est dérivable (sur $\mathbb{R}$) et $\qquad \forall y\in\mathbb{R}\qquad \arctan'(y)=\dfrac{1}{1+y^2}$

Démonstration. De même, les deux premières assertions découlent du fait que arctan et $\tan|_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

La troisième assertion se démontre avec la propriété 8.1.

$\square$

7 Fonctions hyperboliques

7.1 Fonctions ch et sh

Définition 8.35

On définit :

- la fonction cosinus hyperbolique, notée ch :
$$\begin{aligned} \mathrm{ch} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$
- la fonction sinus hyperbolique, notée sh :
$$\begin{aligned} \mathrm{sh} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Attention, à ne pas confondre les définitions de ch et sh avec les formules d'Euler ! Notamment, le nombre i n'intervient pas dans les définitions ci-dessus.

Théorème 8.36 – Propriétés de ch et sh

$$\mathrm{ch}(0) = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(0) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch} x \geq 1$$

ch est paire et sh est impaire.
sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$$

Théorème 8.37 – Identités avec ch et sh

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

sh et ch sont continues et dérivables (sur $\mathbb{R}$), et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) > 0$$

□

7.2 Fonction th

Définition 8.38 – Tangente hyperbolique

On définit la fonction tangente hyperbolique, notée th :

$$\begin{aligned} \mathrm{th} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} \end{aligned}$$

Théorème 8.39 – Propriétés de th

$$\mathrm{th}(0) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -1 < \mathrm{th} x < 1$$

th est impaire.
th est strictement croissante (cf encadré suivant).

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1$$

Théorème 8.40 – Identités avec th

th est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0$$

8 Fonctions exponentielles complexes

On rappelle que I désigne un intervalle (donc $I \subset \mathbb{R}$) non trivial.

Théorème 8.41

Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ dérivable.

La fonction $\begin{cases} I & \to \mathbb{C} \\ x & \mapsto e^{\varphi(x)} \end{cases}$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $\begin{cases} I & \to \mathbb{C} \\ x & \mapsto \varphi'(x) e^{\varphi(x)} \end{cases}$

En pratique, le calcul et donc similaire aux exponentielles réelles : il suffit de dériver la fonction dans l'exponentielle (en considérant i comme une constante).

Exemple 1. Calculer la dérivée de $f : x \mapsto e^{x+ix^2}$.

Exemple 2. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $f : t \mapsto e^{i\omega t}$.

9 Méthodes pour les exercices

Le plus délicat est de retenir les nombreuses formules et propriétés de arccos, arcsin, arctan, ch, sh et th.

Méthode – Mnémotechnie pour arccos**,** arcsin **et** arctan

- Retenir l'allure des courbes des fonctions arccos, arcsin et arctan permet de retrouver les encadrés "propriétés de arccos / arcsin / arctan". En cas de doute, refaire au brouillon la symétrie des courbes de cos / sin / tan qui a permis de les construire.

- Les formules $\arccos(\cos x) = x$, $\arcsin(\sin x) = x$ et $\arctan(\tan x) = x$ sont piégeuses et ne marchent que pour certains x. Pour les reconnaitre, remarquez qu'on lit deux fois d'affilée "cos", "sin" et "tan" !

- Par contre, $\cos(\arccos y) = y$ est toujours vrai, pour tout y pour lequel cela a un sens. Idem pour $\sin(\arcsin y)$ et $\tan(\arctan y)$.

- Pour les dérivées de ces fonctions, on peut en cas de doute retrouver rapidement leur expressions par la formule $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ avec $f = \cos$, $f = \sin$ ou $f = \tan$.