Chapitre 2

Ensembles

Plan du chapitre

1 Introduction . . . 1
 1.1 Définitions, ensembles usuels . . . 1
 1.2 Construction d'ensembles . . . 2
 1.3 Nombre d'éléments d'un ensemble . . . 3
 1.4 Les intervalles de $\mathbb{R}$ . . . 3
2 Opérations sur les ensembles . . . 4
 2.1 Inclusion et appartenance . . . 4
 2.2 Des ensembles qui contiennent... d'autres ensembles ! . . . 5
 2.3 Opérations sur les parties d'un ensemble . . . 5
 2.4 Opérations avec une infinité d'ensembles . . . 8
3 Ensembles produits . . . 9
4 Complément : ensemble et logique . . . 9

1 Introduction

1.1 Définitions, ensembles usuels

La notion d'ensemble est une notion primordiale dans le formalisme moderne des mathématiques. On ne cherchera pas à en donner une définition précise, et on s'en tiendra à une définition "intuitive".

Définition 2.1

Un ensemble est un regroupement d'objets (entiers, réels, fonctions, ...), appelés élements de l'ensemble en question.

- Si deux ensembles E et F ont exactement les mêmes éléments, on dira que E et F sont égaux et on écrira $E = F$. Sinon, on écrira $E \neq F$.
- Si x est un élément d'un ensemble E, on écrira $x \in E$. Sinon, on écrira $x \notin E$.

Exemple 1 (Ensembles usuels)**.**

1. $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, càd des entiers positifs.
2. $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs, càd de tous les entiers, quel que soit leur signe.
3. $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, càd de tous les nombres qui s'écrivent sous la forme d'une fraction $\dfrac{a}{b}$ avec $a,b \in \mathbb{Z}$ et b non nul. Par exemple, $\dfrac{-1}{7} \in \mathbb{Q}$ mais $\pi \notin \mathbb{Q}$.
4. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, donc essentiellement tous les nombres qu'on peut former avec un nombre de décimales fini ou infini : on y trouve tous les rationnels mais aussi $\sqrt{2}$, π, et bien d'autres[1].

1.2 Construction d'ensembles

On peut définir et noter des ensembles de plusieurs façons, mais quelle que soit l'écriture, on utilise toujours des *accolades* pour désigner un ensemble : $\{\ldots\}$.

- Par énumération – on donne explicitement tous les éléments, séparés par des virgules :

$$A = \{\pi\} \qquad B = \{-1,0,1\} \qquad C = \{1,2,\cdots,500\}$$

- Avec une condition – on considère un ensemble E et une assertion $P(x)$ définie pour $x \in E$. On note

$$\boxed{\{x \in E \mid P(x)\}}$$

comme étant l'ensemble des éléments de E pour lesquels $P(x)$ est vraie. Par exemple :

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} \qquad \text{idem pour } \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*$$

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \qquad \text{idem pour } \mathbb{R}_-$$

- Avec un paramètre – on considère un ensemble E et une fonction f définie sur E. On note

$$\boxed{\{f(x) \mid x \in E\}}$$

comme étant l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ lorsque le paramètre x parcourt E. Par exemple :

$$\begin{aligned} 2\mathbb{N} &:= \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ 2\mathbb{N}+1 &:= \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned} \qquad \mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Attention à ne pas confondre les deux écritures encadrées ci-dessus ! $P(x)$ est une *assertion* : on peut lui associer la valeur vraie ou fausse. Par contre $f(x)$ est une *expression*, elle n'a aucune valeur logique en soi. Enfin, dans les deux écritures, x est une variable *muette*.

Remarque. Contrairement aux listes de Python, un ensemble ne tient pas compte des répétitions ni de l'ordre de ses éléments : ainsi $\{1,2\} = \{2,1\} = \{2,1,1\} = \{1,2,2,2,\cdots\}$

Exemple 2. Reconnaitre les ensembles suivants :

$$A = \left\{x^2+1 \mid x \in \mathbb{R}^*\right\} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad B = \left\{ n \in \mathbb{Z}^* \;\middle|\; \frac{1}{n} \in \mathbb{Z} \right\} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1. La définition précise de $\mathbb{R}$ est hors-programme.

1.3 Nombre d'éléments d'un ensemble

Définition 2.2

- Un ensemble est dit un singleton s'il ne contient qu'un seul élément.
- Un ensemble est dit fini s'il possède un nombre fini d'éléments. Sinon, il est dit infini.

Si E est un singleton, on peut écrire $E = \{x\}$ avec x l'unique élément de E.

Exemple 3.

- $\{0\}$, $\{6\}$ sont des singletons, mais $\{1,2\}$ n'est pas un singleton.
- Tout singleton est un ensemble fini, mais la réciproque est fausse.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sont des ensembles infinis.

Enfin, il existe un ensemble très particulier dont la définition découle peu ou prou d'un axiome :

Définition 2.3 (Ensemble vide)

On admet l'existence et l'unicité d'un ensemble qui ne contient aucun élément.
C'est l'ensemble vide. On le note $\varnothing$

Plus généralement, on dit qu'un ensemble est vide s'il ne contient aucun élément (c'est donc l'ensemble vide).

1.4 Les intervalles de $\mathbb{R}$

Soit a, b deux réels. On construit des ensembles appelés intervalles, à partir de deux bornes parmi a, b et $\pm\infty$:

- Les intervalles bornés, qui ne possèdent pas de borne infinie :
  - $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$: intervalle fermé (en a et b).
  - $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$: intervalle ouvert (en a et b).
  - $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$: intervalle ouvert en b, fermé en a.
  - $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$: intervalle ouvert en a, fermé en b.
  - Cas particulier : si $a = b$, alors $[a,b] = [a,a] = \{a\}$: c'est un singleton.
  - Cas particulier : si $b < a$, alors tous les intervalles ci-dessus sont vides.
- Les intervalles non bornés, car au moins une de leurs bornes est $\pm\infty$:
  - $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$: intervalle fermé en a. Idem pour $[a, +\infty[$.
  - $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$: intervalle ouvert en a. Idem pour $]-\infty, a[$.
  - $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Remarque. Attention, un intervalle avec une borne infinie est toujours ouvert en cette borne infinie.

Un intervalle est dit trivial s'il est vide ou si c'est un singleton (cela correspond au deux cas particuliers ci-dessus). Dans le cas contraire, l'intervalle est dit non trivial. Il contient alors une infinité d'éléments.

Définition 2.4 ("Intervalles d'entiers")

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \leq b$. On note :

$$[\![a,b]\!] = \{a, a+1, a+2, \cdots, b-1, b\}$$

On a ainsi $[\![0,5]\!] = \{0,1,2,3,4,5\}$, ou encore $[\![-100,100]\!] = \{-100, -99, \cdots, 99, 100\}$.

2 Opérations sur les ensembles

2.1 Inclusion et appartenance

Définition 2.5

Soit E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F, et on note $E \subset F$, si tout élément de E est un élément de F. On a donc :

Si $E \subset F$, on dit également que E est un sous-ensemble de F ou encore une partie de F. Sinon, on note $E \not\subset F$.

Exemple 4. Pour tout ensemble E, on a $E \subset E$ et $\varnothing \subset E$ (ceci sera justifié en partie 4).
Pour tout $x \in E$, le singleton $\{x\}$ est une partie de E.

Remarque. Il ne faut pas confondre **l'élément** x qui **appartient** à E avec la **partie** $\{x\}$ qui est **incluse** dans E. On écrira donc :

$$0 \in \mathbb{N} \qquad \{0\} \subset \mathbb{N} \qquad \text{mais JAMAIS :} \qquad \underbrace{\cancel{0 \subset \mathbb{N} \qquad \{0\} \in \mathbb{N}}}_{\text{faux !}}$$

Exemple 5. Compléter les pointillés par $\in, \ni, \subset, \supset$ (si un de ces symboles convient) ou par $\notin, \not\ni, \neq$ (dans le cas contraire).

$$[\![0,5]\!] \ldots\ldots [0,5]$$
$$\sqrt{18} \ldots\ldots \left\{3\sqrt{2}\right\}$$
$$\left\{\sqrt{2}\right\} \ldots\ldots \mathbb{Q}$$
$$2\mathbb{N} \ldots\ldots 6\mathbb{Z}$$

$$\left\{\sqrt{x} \mid x \in \mathbb{R}_+\right\} \ldots\ldots \mathbb{Z}$$
$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\right\} \ldots\ldots \{0\}$$
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\right\} \ldots\ldots \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x + y = 0\right\} \ldots\ldots \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{N}\}$$

Théorème 2.6

Soit E, F et G trois ensembles.

$$E = F \iff E \subset F \text{ et } F \subset E$$

$$(E \subset F \text{ et } F \subset G) \implies E \subset G$$

La première propriété ci-dessus permet d'utiliser le raisonnement suivant :

Méthode (Raisonnement par double inclusion)

Pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, on peut montrer successivement que $E \subset F$ puis que $F \subset E$. On dit qu'on raisonne par double inclusion.

Exemple 6. On pose $E = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y > 0 \quad x \leq y\}$. Montrer que $E = \mathbb{R}_-$.

2.2 Des ensembles qui contiennent... d'autres ensembles !

Si on pose $\qquad E = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\} \qquad$ alors E est un ensemble qui contient deux ensembles. Bien que $\mathbb{N}$ soit lui-même un ensemble, c'est aussi un élément de l'ensemble E. On a donc $\mathbb{N} \in E$.

Exemple 7. L'ensemble $\{1,2\}$ n'est pas un singleton, mais $\big\{\{1,2\}\big\}$ est un singleton.

Définition 2.7

On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Autrement dit

Remarque. On a toujours $E \in \mathscr{P}(E)$ et $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$.

Exemple 8. Si $E = \{1,2\}$ on a

$$\mathscr{P}(E) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\big\}$$

Exemple 9. Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$. Compléter.

$$E = \{17\} \implies \mathscr{P}(E) = \ldots\ldots$$

$$E = \{a,b,c\} \implies \mathscr{P}(E) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E = \varnothing \implies \mathscr{P}(E) = \ldots\ldots$$

2.3 Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition 2.8

Soit A,B,E trois ensembles avec $A,B \subset E$ (ou $A,B \in \mathscr{P}(E)$).

- **Intersection $\cap$:** $\quad A \cap B := \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$
- **(Ré)union $\cup$:** $\quad A \cup B := \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ $\quad$ Pour rappel le "ou" est inclusif (cf dessin).
- **Différence $\setminus$:** $\quad A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$
- **Complémentaire :** $\quad E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$ $\quad$ On le note parfois A^c ou $\overline{A}$.

On retiendra par exemple que pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\iff x \in A \text{ et } x \in B \\ x \in A \cup B &\iff x \in A \text{ ou } x \in B \\ x \in A \setminus B &\iff x \in A \text{ et } x \notin B \\ x \in \overline{A} &\iff x \notin A \end{aligned}$$

Exemple 10.

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des irrationnels.
- $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_-$ et idem pour $\mathbb{R}_-^*$.

Exemple 11. Déterminer les ensembles suivants (les complémentaires étant dans $\mathbb{R}$) :

$$\overline{\mathbb{R}_+} = \ldots\ldots \qquad \overline{[1, +\infty[} = \ldots\ldots \qquad \overline{[3,5[} = \ldots\ldots$$

Définition 2.9

Deux ensembles A et B sont dits disjoints si $A \cap B = \varnothing$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Des ensembles $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont dits disjoints deux à deux si quand on prend deux de ces ensembles, ils sont disjoints :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \qquad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing.$$

Définition 2.10

Une partition d'un ensemble E est une famille de sous-ensembles $A_1, A_2, \cdots, A_n$ de E qui sont tous non vides, deux à deux disjoints et dont la réunion donne E tout entier. Autrement dit, ils doivent vérifier :

Exemple 12. $2\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}+1$ forment une partition de $\mathbb{N}$. $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-^*$ forment une partition de $\mathbb{R}$.

Remarque (Disjonction de cas)**.** Si $A_1, \cdots, A_n$ forment une partition d'un ensemble E, alors

$$\forall x \in E \quad P(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall x \in A_1 & P(x) \\ \cdots & \\ \forall x \in A_n & P(x) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \quad \forall x \in A_i \qquad P(x)$$

Théorème 2.11

Soit A, B, C des parties d'un ensemble E.

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (on peut donc écrire $A \cap B \cap C$ sans ambiguïté)
- $A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cap A = A$
- $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (on peut donc écrire $A \cup B \cup C$ sans ambiguïté)
- $A \cup \varnothing = A, \quad A \cup A = A$
- $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- $\overline{(\overline{A})} = A$
- $A \subset B \Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
- $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (une des deux lois de De Morgan)
- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (une des deux lois de De Morgan)

Démonstration. Soit $x \in E$. On reformule les énoncés grâce à la correspondance "logique-ensemble" ci-dessous :

Ensemble	$(x \in E)$	Logique
$x \in A \cup B$	équivaut à	$x \in A$ ou $x \in B$
$x \in A \cap B$		$x \in A$ et $x \in B$
$x \in \overline{A}$		non$(x \in A)$
$A \subset B$		$x \in A \implies x \in B$
$A = B$		$x \in A \iff x \in B$

Les propriétés à démontrer se déduisent alors de propriétés vues au chapitre précédent. Par exemple :

□

2.4 Opérations avec une infinité d'ensembles

On peut définir l'union et l'intersection avec un nombre infini de sous-ensemble. Pour simplifier la présentation (et parce que c'est ce qui sert le plus en pratique), on considère le cas où on dispose d'une suite de sous-ensembles.

Définition 2.12

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de sous-ensembles de E. On définit

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots := \{x \in E \mid \forall k \in \mathbb{N}^* \quad x \in A_k\}$$

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots := \{x \in E \mid \exists k \in \mathbb{N}^* \quad x \in A_k\}$$

Remarque. Dans les égalités ci-dessus, les variables n, x, k sont toutes muettes.

Exemple 13. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} [n, n+1[= \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}]n, n+1[= \ldots\ldots\ldots\ldots$

Pour tout $x \in E$, on retiendra donc les caractérisations suivantes :

$$x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}^* \quad x \in A_n$$

$$x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad x \in A_n$$

Exemple 14. Simplifier l'ensemble $A = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$.

3 Ensembles produits

Définition 2.13

- Étant donné x et y deux objets mathématiques quelconques (par exemple x est un réel et y une suite...), on définit un nouvel objet mathématique, le couple (x, y).

$$(x,y) = (x',y') \qquad \text{signifie} \qquad x = x' \quad \text{et} \quad y = y'$$

- On définit de même les triplets (x, y, z), quadruplets (x, y, z, t), et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les n-uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

$$(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n) \qquad \text{signifie} \qquad \forall i \in [\![1,n]\!] \quad x_i = y_i$$

Attention, les n-uplets tiennent compte de l'ordre : $(1,2) \neq (2,1)$.

De plus, on ne doit pas confondre $\{(1,2)\}$, qui est un singleton qui contient le couple $(1,2)$, et l'ensemble $\{1,2\}$.

Définition 2.14 (Ensembles produits)

- A et B étant deux ensembles, on définit le produit cartésien de A et B comme étant l'ensemble

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

- Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \cdots, A_n$ des ensembles, on définit leur produit cartésien par

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \;\middle|\; a_1 \in A_1, \quad a_2 \in A_2, \quad \cdots \quad a_n \in A_n \right\}$$

On notera $\quad A^2 := A \times A \quad$, et plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\qquad A^n := \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$

Cette année on parlera notamment des ensembles $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou encore $\mathbb{R}^n$.

Exemple 15. On pose $A = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. A-t-on $A \subset B$ ou $B \subset A$?

4 Complément : ensemble et logique

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un élément x d'un ensemble quelconque. Par convention :

- "$\forall x \in \varnothing \quad P(x)$" est toujours *vrai*.
- "$\exists x \in \varnothing \quad P(x)$" est toujours *faux*.

Rappel : pour tout ensemble E,

$$\varnothing \subset E \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi, grâce à la convention ci-dessus, on a bien $\varnothing \subset E$. Cette convention entraine aussi le fait que "Faux $\implies$ ..." est vrai. En effet, pour deux propositions P et Q dépendant d'une variable x dans E :

$$(\forall x \in E \quad P(x) \implies Q(x)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \{x \in E \mid P(x)\} \subset \{x \in E \mid Q(x)\}$$

À présent, si $P(x)$ est fausse pour tout x de E, l'inclusion de droite se réécrit "$\varnothing \subset \ldots$", ce qui est toujours vrai.