Chapitre 1

Logique

Plan du chapitre

1 Assertions et prédicats

Définition 1.1 (Assertion, proposition)

Une assertion (ou proposition) est un énoncé auquel on peut attribuer une et une seule valeur logique : soit Vrai (V), soit Faux (F).

On peut donner un nom à une proposition : on utilise en général les lettres P, Q, R.

Exemple 1. ◦ P : $3^2 = 9$ est une assertion vraie.

◦ Q : ”5 est divisible par 2” est une assertion fausse.

◦ “77” et “$\sqrt{!} = \times$” ne sont pas des assertions : ces énoncés ne sont ni vrai ni faux en soi.

Définition 1.2 (Prédicat)

Un prédicat est une proposition dont la valeur logique dépend de la valeur d'une ou plusieurs variables (en général notées x, y, z...).

On peut alors utiliser une notation similaire aux fonctions : si P est un prédicat qui dépend d'une variable x, on notera $P(x)$ la proposition correspondante.

Exemple 2. On pose

$$P(x): \quad \sqrt{x} - 3 \geq 0$$

Alors $P(1)$ est fausse, $P(100)$ est vraie, et $P(-1)$ n'est pas une assertion (car $\sqrt{-1}$ n'a pas de sens).

Remarque. Un prédicat est donc en quelque sorte une "fonction logique" : à chaque valeur du ou des arguments, on associe la valeur logique Vraie ou Fausse. Comme une fonction, un prédicat peut avoir un "ensemble de définition". Par exemple, le prédicat P ci-dessus n'est défini que pour $x \in \mathbb{R}_+$.

Exemple 3. Soit x, y deux réels. On pose $\quad Q(x,y): \quad x < y^2$

- $Q(2,3)$ est .... $\qquad Q(1,-1)$ est .... $\qquad Q(-1,1)$ est ....
- Si x est un réel négatif, $Q(x,x)$ est ....
- Si x est un réel positif, $Q(x,x)$ est $\begin{cases} \text{vraie} & \text{si ....} \\ \text{fausse} & \text{si ....} \end{cases}$

2 Opérateurs logiques

Hypothèse

Dans le reste du chapitre, P, Q, R sont des assertions quelconques.

Grâce à des opérateurs logiques (ou connecteurs logiques), on peut combiner des assertions pour en construire de nouvelles. On verra cinq opérateurs logiques : non $\quad$ et $\quad$ ou $\quad \Longrightarrow \quad \Longleftrightarrow$

2.1 La négation (opérateur "non")

Définition 1.3 (Négation)

On note "non$P$" l'assertion dont la valeur de vérité est la suivante :

- Lorsque P est vraie (V), non$P$ est fausse (F).
- Lorsque P est fausse (F), non$P$ est vraie (V).

On peut résumer ces informations dans une table de vérité :

P	non$P$
F	V
V	F

Exemple 4. ◦ La proposition $\quad P: 5 = 2 \quad$ est fausse. Sa négation est $\quad$ non$P: 5 \neq 2 \quad$ qui est donc vraie.

- Soit x un réel. La proposition $\boxed{P(x): \quad x>3}$ a pour négation $\boxed{\text{non}P(x): \quad x \leq 3}$. Si $P(x)$ est vraie, alors non$P(x)$ est fausse et réciproquement.

Attention : la négation de $x > 3$ n'est pas $x < 3$: en effet si x vaut 3, les deux assertions sont fausses en même temps. Elles ne peuvent pas donc être la négation l'une de l'autre. Quand on passe à la négation, le symbole $>$ est remplacé par $\leq$ et réciproquement. De même, $<$ est remplacé par $\geq$ et réciproquement.

2.2 La conjonction (opérateur "et")

Définition 1.4 (Conjonction)

On note "P et Q" l'assertion dont la valeur de vérité est la suivante :

- Si P et Q sont toutes les deux vraies, alors "P et Q" est vraie.
- Sinon, "P et Q" est fausse.

Par conséquent, la table de vérité de "P et Q" est donnée par :

P	Q	P et Q
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Exemple 5.
- L'assertion "$\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$" est vraie.
- Étant donné un réel x quelconque, l'assertion "$x = 2$ et $x = 0$" est fausse.
- L'assertion "P et non$P$" est ....

2.3 La disjonction (opérateur "ou")

Définition 1.5 (Disjonction)

On note "P ou Q" l'assertion dont la valeur de vérité est la suivante :

- Si une des deux (ou les deux) assertions P et Q sont vraies, alors "P ou Q" est vraie.
- Sinon, "P ou Q" est fausse.

Subséquemment, la table de vérité de "P ou Q" est donnée par :

P	Q	P ou Q
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Remarque. Dans le langage courant, le mot "ou" a plusieurs sens :

- Le *ou exclusif* : dans la phrase "Je veux aller à la mer ou à la montagne", il est clair qu'on ne peut pas aller aux deux endroits à la fois, c'est l'un ou l'autre. Cela revient à dire "Je veux aller *ou bien* à la mer, *ou bien* à la montagne".
- Le *ou inclusif* : dans la phrase "Cette clinique accueille des personnes malades ou âgées", il est clair que la clinique accueillera également une personne qui est en même temps âgée et malade. Pour lever l'ambiguité, on peut remplacer "ou" par "*et/ou*".

En mathématiques, l'opérateur logique "ou" est sytématiquement un *ou inclusif*.

Exemple 6.
- L'assertion "$2^2 = 1$ ou $2^2 = 4$" est vraie.
- L'assertion "P ou non$P$" est ....

2.4 L'implication (opérateur $\Longrightarrow$)

Définition 1.6 (Implication)

On note "$P \Longrightarrow Q$" (et on lit "P implique Q") l'assertion dont la valeur de vérité est la suivante :

- Si P est vraie et Q est fausse, alors "$P \Longrightarrow Q$" est fausse.
- Sinon "$P \Longrightarrow Q$" est vraie.

Il est plus efficace de retenir la table de vérité :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
F	F	**V**
F	V	**V**
V	F	F
V	V	V

Attention ! Comme on peut le voir, si P est fausse, alors $P \Longrightarrow Q$ est toujours vraie, ce qu'on peut écrire grossièrement :

$$\text{Faux} \Longrightarrow \text{"n'importe quoi"} \qquad \text{est vrai}$$

En réalité, "$P \Longrightarrow Q$" signifie exactement **"Si P est vraie, alors Q est vraie"**. S'il s'avère que P est fausse, alors l'assertion $P \Longrightarrow Q$ n'affirme rien : on considère qu'elle est vraie. Il s'agit d'une convention[1].

Exemple 7. Soit x un réel. Les assertions suivantes sont vraies :

$$x > 2 \Longrightarrow x \geq 2$$

$$x \leq 0 \Longrightarrow 2x \leq x$$

Exemple 8. Soit x un réel. Les assertions suivantes sont *fausses* :

$$x \leq 0 \Longrightarrow x < 0$$

$$x^2 = x \Longrightarrow x = 0$$

Remarque. On peut écrire le symbole $\Longrightarrow$ à l'envers : $P \Longleftarrow Q$ revient à écrire $Q \Longrightarrow P$.

Exemple 9. Dans ce qui suit, remplacez les pointillés par $\Longrightarrow$ ou $\Longleftarrow$ pour que l'assertion soit vraie (x et y sont des réels) :

$$\begin{array}{rcl} x^2 \geq 0 & \dots & x \geq 0 \\ x = y & \dots & x \neq y+1 \\ x < y & \dots & y > x \end{array}$$

1. Une convention est un choix arbitraire de la communauté mathématique. Par exemple, le fait que le chiffre 1 ne soit pas premier est aussi une convention. Le but d'une convention est souvent de simplifier les énoncés des théorèmes. Par exemple, si on supposait que 1 était un nombre premier, il faudrait rajouter des exceptions et des cas particuliers à la plupart des théorèmes sur les nombres premiers.

2.5 Intermède : le "vrai" implicite

Afin d'alléger le propos, on pourra ne plus écrire "P est vraie" mais simplement "P" : sans autre précision, on sous-entend dorénavant le "est vraie". Ainsi, au lieu de "n est pair est vrai" on pourra se contenter de "n est pair". En particulier, $P \implies Q$ peut se réécrire :

"Si on a P, alors on a Q"

"Si P, alors Q"

Cela correspond à ce qu'on dit oralement :

$$\text{"Si } \underbrace{n \text{ est pair}}_{P}\text{, alors } \underbrace{n+1 \text{ est impair}}_{Q}\text{"}$$

Attention toutefois : lorsqu'on écrit "Si P, alors Q", cela ne signifie pas que P soit vraie, pas plus que Q soit vraie.

2.6 L'équivalence (opérateur $\iff$)

Définition 1.7

L'assertion "$P \iff Q$" se lit "P est équivalente à Q" ou encore "P si et seulement si Q".

- Si P et Q ont la même valeur de vérité (V ou F), alors "$P \iff Q$" est vraie.
- Sinon, "$P \iff Q$" est fausse.

Par voie de fait, $P \iff Q$ est définie par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \iff Q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

On remarquera que $Q \iff P$ et $P \iff Q$ signifient la même chose. On dit alors que P et Q sont équivalentes.

Exemple 10. Soit n un entier. Alors

$$n \geq 3 \iff n-3 \geq 0$$

$$\begin{aligned} n \text{ est pair} &\iff n \text{ est divisible par } 2 \\ &\iff n+1 \text{ est impair} \\ &\iff \frac{n}{2} \text{ est entier} \end{aligned}$$

Ci-dessus, on a écrit une chaine d'équivalences (symboles $\iff$ superposés). C'est comme si on avait tout écrit sur une seule ligne. On peut faire de même avec $\implies$, $=$, $\leq$, etc.

Méthode (Montrer une équivalence par une table de vérité)

Pour montrer l'équivalence entre deux assertions, il suffit de vérifier qu'elles prennent les mêmes valeur de vérité en même temps. On peut le faire avec une table de vérité, cf section suivante.

Attention : la table de vérité repose entièrement sur la logique "pure" pour montrer une équivalence. Ce n'est pas un outil très adapté dans un cas général. En dehors de ce chapitre, son utilisation est marginale.

2.7 Combinaison d'opérateurs

Les opérateurs "non, et, ou, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ " permettent, à partir d'assertions P, Q, R,... de construire de nouvelles assertions. Par exemple, "P et Q" est encore une assertion. On peut utiliser plusieurs opérateurs d'affilée, mais pour lever toute ambiguité il faut en général rajouter des parenthèses. Considérons les deux assertions :

$$(P \text{ et } Q) \Longrightarrow R$$

$$P \text{ et } (Q \Longrightarrow R)$$

Si P, Q, R sont toutes fausses, alors :

- la première assertion est .... car ....
- la seconde assertion est .... car ....

Ces deux assertions ne sont donc pas équivalentes puisque dans le cas particulier ci-dessus, elles n'ont pas la même valeur de vérité. D'où l'importance de ces parenthèses. Toutefois, il est fréquent de sous-entendre des parenthèses de chaque côté des équivalences, des implications ou juste après un "non". Par exemple, dans l'assertion "P et $Q \Longleftrightarrow$ non$R$ ou S", il faut comprendre $(P \text{ et } Q) \Longleftrightarrow (\text{non}(R) \text{ ou } S)$. Le théorème 1.8 fournit d'autres exemples.

Exemple 11. Soit x un réel.

$$x^2 = 1 \Longrightarrow (x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1)$$

Exemple 12. Soit P une assertion. Alors P et non(non$P$) sont équivalentes. En effet, elles prennent la même valeur de vérité en même temps :

P	non$P$	non(non$P$)
F	V	**F**
V	F	**V**
↑		↑

Les colonnes marquées par "↑" sont identiques pour tous les cas possibles : les assertions P et non(non$P$) sont donc équivalentes.

Théorème 1.8

Soit P, Q, R des assertions. Alors :

1. $P \Longleftrightarrow \text{non}(\text{non}P)$
2. $\text{non}(P \text{ ou } Q) \Longleftrightarrow \text{non}P \text{ et non}Q$
3. $\text{non}(P \text{ et } Q) \Longleftrightarrow \text{non}P \text{ ou non}Q$
4. $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \Longleftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
5. $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \Longleftrightarrow (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
6. $\boxed{\text{non}(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow P \text{ et non}Q}$

Démonstration. La preuve suit le même principe que ci-dessus avec une table de vérité. On ne montrera que la dernière propriété, qui est plus essentielle que les autres :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	non$(P \Longrightarrow Q)$	non$Q$	P et non$Q$
F	F				
F	V				
V	F				
V	V				
			↑		↑

□

3 Les quantificateurs

3.1 Quantificateurs $\forall$, $\exists$, $\exists!$

Définition 1.9 (Quantificateurs logiques)

Soit E un ensemble et P un prédicat qui dépend d'une variable x dans E.

- L'assertion
$$\forall x \in E \qquad P(x)$$
est vraie lorsque **pour tous** les éléments x de E, l'assertion $P(x)$ est vraie.
- L'assertion
$$\exists x \in E \qquad P(x)$$
est vraie lorsqu'**il existe au moins** un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie.
- L'assertion
$$\exists! x \in E \qquad P(x)$$
est vraie lorsqu'**il existe un unique** x dans E pour lequel $P(x)$ est vraie.

Remarque. Les symboles $\forall$, $\exists$ et $\exists!$ sont appelés des quantificateurs.

- À l'oral, "$\forall x \in E$" se dit "pour tout $x \in E$" ou "quel que soit $x \in E$".
- À l'oral, "$\exists x \in E$" se dit "il existe $x \in E$ (tel que)".
- À l'oral, "$\exists! x \in E$" se dit "il existe un unique $x \in E$ (tel que)".

Les quantificateurs sont ***essentiels*** : ils font partie du langage des mathématiques au même titre que π ou $\mathbb{R}$.

Exemple 13.

1. "$\forall n \in \mathbb{N} \quad n$ est pair" est faux.
2. "$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq x$" est ....
3. "$\exists y \in \mathbb{R}_+ \quad y \leq 0$" est vraie.
4. "$\exists m \in \mathbb{N} \quad m^2 = 3$" est ....
5. "$\exists! x \in \mathbb{R} \quad x = \pi$" est vraie.
6. "$\exists! n \in \mathbb{R} \quad n^2 = 1$" est ....

Dans la dernière assertion ci-dessus, on a employé la lettre n pour désigner un réel. C'est possible ! On peut remplacer la lettre n par n'importe quel symbole[2] :

$$\exists! f \in \mathbb{R} \qquad f^2 = 1$$

$$\exists! \heartsuit \in \mathbb{R} \qquad \heartsuit^2 = 1$$

Les variables f et $\heartsuit$ ci-dessus (comme les autres variables de l'example 13) sont dites des variables muettes (cf chapitre 0).

2. Il y a quand même des exceptions : on ne peut pas écrire $\exists! \infty \in \mathbb{R} \qquad \infty^2 = 1$ car le symbole ∞ est déjà "réservé" pour désigner l'infini.

Théorème 1.10

Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier.

$$\begin{aligned} n \text{ est pair} &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \qquad n = 2k \\ n \text{ est impair} &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \qquad n = 2k+1 \end{aligned}$$

3.2 Plusieurs quantificateurs

On peut enchainer plusieurs quantificateurs (liés à des variables différentes) : l'assertion

$$\exists x \in \mathbb{R} \qquad \exists y \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$$

signifie qu'il existe deux réels x et y qui vérifient le système ci-dessus. Cette assertion est vraie : $x = \dfrac{3}{2}$ et $y = -\dfrac{1}{2}$ conviennent. De même,

$$\forall x \in \mathbb{R}_- \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad n^2 - x \geq 0$$

est une assertion qui se lit naturellement : elle affirme que, quels que soient le réel négatif x et l'entier n qu'on se donne, on a $n^2 - x \geq 0$. Cette assertion est vraie, car $n^2 \geq 0$ et $-x \geq 0$.

Ordre (quantificateurs identiques)

Lorsqu'il y a deux quantificateurs *identiques consécutifs* (deux $\forall$ ou deux $\exists$), on peut les échanger et obtenir une assertion équivalente à celle d'origine. Ainsi, toutes ces écritures sont équivalentes :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall y \in \mathbb{R} \qquad P(x,y) \\ &\forall y \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x,y) \\ &\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad P(x,y) \\ &\forall x,y \in \mathbb{R} \qquad P(x,y) \end{aligned}$$

et de même lorsque tous les "$\forall$" sont remplacés par des "$\exists$". La dernière écriture est particulière et peu courante en CPGE. Elle permet d'aller plus vite lorsque les deux variables appartiennent au même ensemble (ici $\mathbb{R}$).

Ordre (quantificateurs différents)

Les assertions ci-dessous ne sont pas équivalentes :

$$P: \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad \exists y \in \mathbb{R} \qquad y^2 = x$$

$$Q: \qquad \exists y \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad y^2 = x$$

L'ordre dans lequel les quantificateurs apparaissent change le sens :

1. Dans P, le quantificateur $\exists y$ se trouve **après** $\forall x$: cela signifie que la variable y **peut dépendre de** x. Ainsi, P signifie que pour tout x (fixé) qu'on se donne, il existe un y (qui peut dépendre de x) vérifiant $y^2 = x$. Un tel y existe bien, on peut prendre $y = \sqrt{x}$ (ou $y = -\sqrt{x}$), qui est bien dans $\mathbb{R}$. P est donc vraie.
2. Dans Q, le quantificateur $\exists y$ se trouve **avant** $\forall x$: cela signifie que la variable y **doit être posée indépendamment de** x. Ainsi, Q signifierait qu'il existe un réel y (indépendant de x) tel que pour tout réel x, on a $y^2 = x$. Supposons par l'absurde[3] que Q est vraie. Il existe donc $y \in \mathbb{R}$ (indépendant de x) tel que pour tout réel x, on a $y^2 = x$.

3. Cf le Chapitre 0 pour plus de détails sur le raisonnement par l'absurde.

(a) Avec $x = 0$, cela entraine $y^2 = 0$.
(b) Avec $x = 1$, cela entraine $y^2 = 1$.

On a donc $0 = y^2 = 1$. Contradiction. Donc Q est fausse.

Théorème 1.11

Avec un quantificateur $\exists z(\dots)$, la variable z peut dépendre de toutes les variables situées *avant* le quantificateur $\exists z(\dots)$, mais est indépendante des autres variables situées *après* ce même quantificateur.
La règle est identique avec $\exists! z(\dots)$

Par exemple dans

$$\exists x \dots \qquad \forall y \dots \qquad \exists! z \dots \qquad \forall t \dots \qquad P(x,y,z,t)$$

- La variable x ne peut pas dépendre de y, z, t.
- (L'unique) valeur de z peut dépendre de x et y, mais pas de t.
- Pour y et t, le quantificateur est $\forall$ donc la proposition doit être vérifiée quelle que soit la valeur permise. Il n'y a donc pas lieu de dire que y ou t dépendent d'autres variables.

Remarque. Dans l'exemple ci-dessus, on ne peut pas changer l'ordre des quantificateurs.

3.3 Quantificateurs et négation

Théorème 1.12

- La négation de $\forall x \in E \quad P(x)$ est $\exists x \in E \quad \text{non}P(x)$.
- La négation de $\exists x \in E \quad P(x)$ est $\forall x \in E \quad \text{non}P(x)$.

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ sont donc échangés en passant à la négation. Il ne faut pas oublier de transformer $P(x)$ en non$P(x)$!

Exemple 14.

L'assertion ...	est (V/F)...	et a pour négation...	qui est donc (V/F)...
$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 0$	V	$\exists n \in \mathbb{N} \quad n < 0$	F
$\exists y \in \mathbb{R} \quad y \neq \pi$	....		....
$\exists a \in [0,1] \quad a < a^2$	....		....

Remarque. La négation du quantificateur $\exists!$ est plus délicate, un exercice en TD traitera la question.

Négation avec plusieurs quantificateurs

On reprend l'assertion (fausse)

$$Q: \qquad \exists y \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad y^2 = x$$

On souhaite écrire non$Q$. Bien qu'il y ait plusieurs quantificateurs, la méthode est identique : on inverse chaque quantificateur puis on passe à la négation dans l'assertion finale. Ainsi,

non$Q$:

Exemple 15. Expliquer pourquoi non$Q$ est vraie (sans utiliser le fait que Q est fausse).

4 Quelques théorèmes de logique

Dans cette section, on présente des résultats de logique qui donnent une justification théorique à des raisonnements classiques. Cette section, plus encore que les précédentes, est à lire en parallèle du chapitre 0, où vous trouverez notamment des exemples où on utilise ces raisonnements, avec la bonne rédaction.

4.1 Contraposée

Théorème 1.13 (Contraposée)

Soit P, Q deux assertions.

$$P \implies Q \qquad \text{est équivalente à} \qquad \text{non}Q \implies \text{non}P$$

L'assertion $\text{non}Q \implies \text{non}P$ est appelée la <u>contraposée</u> de l'assertion $P \implies Q$.

Passer par la contraposée permet parfois de montrer plus facilement une implication. Il faut toutefois être précis dans la rédaction, on renvoie au chapitre 0 pour un exemple.

4.2 Double implication

Théorème 1.14 (Double implication)

Soit P, Q deux assertions.

$$P \iff Q \qquad \text{est équivalente à} \qquad (P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)$$

Démonstration. Avec une table de vérité, comme pour le théorème 1.8. □

Ainsi, pour montrer une équivalence, on peut montrer les deux implications $\implies$ et $\impliedby$ à la place. L'implication dans le sens $\implies$ est appelée “sens direct” et celle dans le sens $\impliedby$ est appelée “sens réciproque”.

4.3 Le principe de récurrence

Une récurrence sert à montrer une assertion de la forme $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$ Dans cette section, l'assertion $P(n)$ sera notée H_n. Le but est donc de montrer que H_n est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Il existe plusieurs types de récurrence, mais toutes sont basées sur le même triptyque : initialisation et hérédité pour en déduire la conclusion.

Théorème 1.15 (Récurrence simple)

$$\Big(\underbrace{H_0}_{\text{initialisation}} \text{ et } \underbrace{(\forall n \in \mathbb{N} \quad H_n \implies H_{n+1})}_{\text{hérédité}} \Big) \implies \underbrace{\forall n \in \mathbb{N} \quad H_n}_{\text{conclusion}}$$

La partie hérédité peut se réécrire $\quad (H_0 \implies H_1) \quad \text{et} \quad (H_1 \implies H_2) \quad \text{et} \quad \ldots \quad$ Si on ajoute à cela le fait que H_0 est vraie, on peut en déduire de proche en proche que H_1 est vraie, puis que H_2 est vraie, etc.

Théorème 1.16 (Récurrence double)

$$\Big(\underbrace{H_0 \text{ et } H_1}_{\text{initialisation}} \quad \text{et} \quad \underbrace{(\forall n \in \mathbb{N} \quad (H_n \text{ et } H_{n+1}) \implies H_{n+2})}_{\text{hérédité}}\Big) \implies \underbrace{\forall n \in \mathbb{N} \quad H_n}_{\text{conclusion}}$$

Théorème 1.17 (Récurrence forte)

$$\Big(\underbrace{H_0}_{\text{initialisation}} \quad \text{et} \quad \underbrace{(\forall n \in \mathbb{N} \qquad (H_0 \text{ et } H_1 \text{ et } \dots \text{ et } H_n) \implies H_{n+1})}_{\text{hérédité}}\Big) \implies \underbrace{\forall n \in \mathbb{N} \quad H_n}_{\text{conclusion}}$$

Remarque (Commencer à un indice donné)**.** Que ce soit la récurrence simple, double ou forte, si on veut montrer H_n seulement pour $n \geq 1$, alors on peut “commencer” une récurrence à l’indice 1 plutôt que 0. Pour l’initialisation, on montre H_1 (et H_2 pour une récurrence double), puis pour l’hérédité on se donne un entier $n \geq 1$ plutôt que $n \in \mathbb{N}$. De même, on peut commencer à l’indice 2, 3, etc.

4.4 Disjonction de cas

Théorème 1.18 (Disjonction de cas)

Soit E un ensemble et P un prédicat qui dépend d’une variable x dans E. Soit E_1, E_2 deux sous-ensembles de E tels que $E = E_1 \cup E_2$. Alors :

$$(\ \forall x \in E \quad P(x)\ ) \iff \begin{cases} \forall x \in E_1 & P(x) \\ \forall x \in E_2 & P(x) \end{cases}$$

Remarque. L’accolade ci-dessus a la même signification qu’un “et” logique. Ainsi, pour montrer “$\forall x \in E \quad P(x)$”, on peut montrer “$\forall x \in E_1 \quad P(x)$” et “$\forall x \in E_2 \quad P(x)$”.

Ceci permet de découpler le problème : il est parfois plus facile de montrer une propriété $P(x)$ en traitant séparément le cas $x \in E_1$ et le cas $x \in E_2$. C’est particulièrement efficace lorsque $E = \mathbb{N}$, et qu’on veut distinguer entier pair et entier impair. Comme toujours, on renvoie au chapitre 0 pour des exemples avec la rédaction.

5 Vocabulaire lié aux implications et équivalences

Les mathématiciens disposent de plusieurs façons de signifier l’implication et l’équivalence d’assertions. Dans chaque cadre, les différentes lignes sont toutes synonymes :

Q est une condition nécessaire (CN) de P.	Q est une condition suffisante (CS) de P.	Q est une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour P.
$P \implies Q$	$Q \implies P$	$P \iff Q$
Pour avoir P, il faut (*nécessairement*) avoir Q.	Pour avoir P, il est *suffisant* d’avoir Q.	Pour avoir P, il est *nécessaire* et *suffisant* d’avoir Q.
On a P seulement si (on a) Q.	On a P si (on a) Q.	On a P **si et seulement si** (on a) Q.

Attention, si $P \implies Q$, alors P est une CS de Q, et Q est une CN de P. On peut se donner le moyen mnémotechnique suivant :

$$\text{''Suffisant} \implies \text{Nécessaire"}$$