Chapitre 0

Rédaction et raisonnements

Plan du chapitre

Même si on est convaincu qu'un énoncé mathématique est vrai, il peut arriver qu'au moment de passer à la preuve, on ne sache pas par où commencer. Le point de départ d'une bonne démonstration est avant tout une bonne rédaction. Même si votre raisonnement vous semble clair “dans votre tête”, c'est une autre affaire de le rendre compréhensible pour le plus grand nombre et éviter toute confusion possible. C'est l'objectif de ce chapitre, qui constituera une référence tout au long de l'année.
La rédaction ne s'improvise pas, car elle mêle des automatismes qui s'acquièrent par la pratique et des définitions et théorèmes qu'il faut savoir invoquer au bon moment et précisément. La critique est aisée et l'art est difficile, mais c'est aussi un plaisir d'apprendre à rédiger.

1 Axiomes, définitions, théorèmes, etc.

- **Axiome** : on appelle *axiome* un énoncé mathématique qu'on suppose vrai, sans apporter de justification. L'existence de l'ensemble vide est un exemple d'axiome. Les axiomes qu'on considère forment un socle d'une construction : chaque assertion qu'on arrive à démontrer à partir des axiomes permet d'ajouter une pierre à l'édifice. Ces assertions peuvent ensuite être utilisées pour en démontrer de nouvelles. Cet empilement d'axiomes, de démonstrations et d'assertions est ce qu'on appelle une *théorie mathématique*.

  Nous aurons très peu l'occasion de rencontrer les axiomes classiques sur lesquels se fondent les mathématiques modernes. Nous nous efforcerons de montrer (ou de donner une idée de preuve) de la majorité des résultats, mais pas tous. Nous *admettrons* que certaines propositions sont vraies, comme si elles étaient des axiomes. En particulier, nous admettrons l'existence des nombres réels, alors que, loin d'accepter cela comme un état de fait, les mathématiciens peuvent construire rigoureusement l'ensemble $\mathbb{R}$ à partir d'axiomes plus élémentaires.

- **Définition** : on appelle *définition* toute manière d'associer un nom précis à un objet mathématique qui vérifie une propriété donnée. Le principal intérêt d'une définition est de gagner du temps. Plutôt que de dire "nombre entier supérieur ou égal à 2 divisible uniquement par 1 et par lui-même", on peut dire "nombre premier".

  Une définition n'est donc pas un résultat mathématique : elle n'appelle à aucune démonstration. Par contre il est indispensable de les connaitre précisément pour "parler la même langue" que les autres mathématiciens.

- **Théorème** : on appelle *théorème* toute proposition d'une théorie qu'on a pu démontrer à partir des axiomes. Un théorème est donc vrai, là où une proposition ne l'est pas forcément (ou reste à démontrer). D'autres termes peuvent être utilisés pour désigner certaines catégories de théorèmes :

  – **Lemme** : on appelle *lemme* un théorème préliminaire, qui permet simplifier la démonstration d'un autre théorème. Certains lemmes ne constituent pas un résultat essentiel à retenir.
  – **Corollaire** : on appelle *corollaire* un théorème dont la démonstration découle presque trivialement d'un théorème précédent.
  – **Caractérisation** : on appelle *caractérisation* un théorème qui donne une équivalence entre une définition (éventuellement assortie de conditions) et une assertion [1]. Voici un exemple :

Définition (Fonction croissante)

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est croissante (sur I) si :

$$\forall x, y \in I \qquad (x < y \implies f(x) \leq f(y))$$

Théorème (Caractérisation d'une fonction croissante)

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **dérivable**. Alors f est croissante (sur I) si et seulement si f' est positive ou nulle (sur I).

On notera que ce dernier théorème fournit une caractérisation de la croissance d'une fonction, mais uniquement sous *l'hypothèse* que cette fonction soit dérivable.

2 Bien doser la justification

Lors d'une démonstration, votre objectif est de *convaincre* votre interlocuteur qu'une assertion est vraie. Vous devez donc faire en sorte que votre preuve soit la plus claire possible, et assortie des arguments les plus pertinents. En particulier, il faut éviter deux extrêmes : justifier trop, ou justifier trop peu. Voici un exemple :

On note f la fonction définie par $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$.
Montrer qu'il existe un réel x tel que $f(x) = 0$.

1. Plus généralement, on appelle parfois caractérisation un théorème qui démontre l'équivalence entre deux ou plusieurs assertions.

Une justification incomplète
On remarque que $f(-1) = -2$ et $f(1) = 2$. Donc il existe un réel x dans $[-1,1]$ tel que $f(x) = 0$.

Une justification correcte
Comme f est polynômiale, elle est **continue**. De plus,

$$f(-1) = -2 \boxed{\leq 0}$$
$$f(1) = 2 \boxed{\geq 0}$$

Comme $[-1,1]$ est un **intervalle**, par le **théorème des valeurs intermédiaires**, on en déduit qu'il existe $x \in [-1,1]$ tel que $f(x) = 0$.

Une justification trop détaillée
Comme f est polynômiale, elle est continue. De plus,

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2 \times (-1)^3 - (-1)^2 + 1 \\ &= -2 - 1 + 1 \\ &= -2 \leq 0 \end{aligned}$$

et

$$f(1) = (\dots) = 2 \geq 0$$

De plus $[-1,1]$ est un intervalle car -1 et 1 sont des réels. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, qui stipule que (...), on en déduit qu'il existe $x \in [-1,1]$ tel que $f(x) = 0$.

Comment trouver le degré de justification correct ? Jusqu'à quel point doit-on détailler une preuve ? Il n'y a pas de réponse universelle ! Contrairement aux mathématiques, la rédaction n'est pas une science exacte. Il faut donc trouver un juste milieu, qui va dépendre du contexte et de la personne qui va vous lire. Au fur et à mesure de l'année, vous allez acquérir les bons réflexes et le niveau de rigueur attendu en CPGE. Voici quelques indications :

- Les premières questions d'un devoir et/ou d'un exercice sont très importantes. Si vous mettez suffisamment l'accent sur le détail au début, on est plus disposé à vous pardonner un manque de rigueur plus tard.
- Si un théorème nécessite des hypothèses pour être appliqué, il faut les vérifier conciencieusement, au moins la première fois qu'on se sert de ce théorème. Pour les fois suivantes, on peut être plus expéditif (sauf si la vérification d'une de ces hypothèses est plus complexe et nécessite plus de détail).
- Certains théorèmes ont un nom. Lorsqu'un tel théorème est invoqué, il faut a minima donner son nom. Pour les théorèmes sans nom, on peut se contenter de vérifier les éventuelles hypothèses, et on comprendra par le contexte quel théorème vous avez utilisé (par exemple on peut se contenter d'écrire "f est dérivable donc f est continue").

3 Introduire les variables ou objets utilisés

Une règle d'or de rédaction en mathématiques, c'est que TOUT OBJET DONT ON PARLE DOIT AVOIR ÉTÉ INTRODUIT. En français, si vous dites : « Elle les lui a donnés hier » sans avoir précisé auparavant qui sont « elle », « les » et « lui », personne ne comprendra. En maths c'est pareil, mettez-vous à la place de vos interlocuteurs et présentez tout ce dont vous parlez.

On distingue plusieurs "statuts" pour un objet mathématique, et l'introduction de l'objet va varier au cas par cas :

1. **Variable** : quand on se donne un réel x quelconque, on dit que x est une *variable*. La variable x n'a pas de valeur définie, elle représente à elle seule n'importe quel réel. Si on montre ensuite qu'une proposition $P(x)$ est vraie (quel que soit le réel x !), alors cela revient à montrer "$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x)$".

Pour introduire une variable x prise dans un ensemble E, on écrit :

$$\begin{array}{ll} \text{"Soit } x \in E\text{."} & \left.\right\} \text{la variable } x \text{ est née} \\ \vdots & \multirow{2}{*}{} \\ \vdots & \left.\right\} \text{vie de la variable } x \end{array}$$

Avant le mot “Soit”, x ne désignait rien. Puis, par la magie du verbe, on a donné naissance à la variable x. Elle va vivre le temps d’une preuve, tant qu’on en a besoin. Ensuite, elle retournera au néant, où elle attendra un autre “Soit” qui lui octroiera une nouvelle vie.

Si on sait par avance que la variable x aura une vie courte d’une ligne ou deux, on peut aussi écrire “Pour tout $x \in E$ (...)” pour l’introduire plutôt que “Soit $x \in E$. (...)”.

2. **Variable muette** : certains symboles mathématiques comme $\sum, \prod, \int, \forall, \exists \dots$ introduisent automatiquement des variables, dites *muettes*, qui n’existent qu’à l’intérieur d’une expression. Par exemple dans les expressions :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \qquad \int_0^1 e^{nx} dx \qquad t \mapsto \frac{1}{t^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad P(x)$$

les variables k, x et t sont toutes muettes, et il n’est pas nécessaire de les introduire. La variable n, ainsi que le prédicat P, au contraire, doivent avoir été introduit au préalable pour que les expressions correspondantes aient un sens.

3. **Constante universelle** : de nombreux objets mathématiques ont une notation spécifique et universelle pour les désigner. Les symboles 3, π, cos ou encore $\mathbb{R}$ désignent un seul et unique objet. Ces objets sont des *constantes (universelles)* et il n’est pas nécessaire de les introduire.

4. **Constante introduite** : il est tout à fait possible de créer ses propres constantes, afin de gagner du temps lorsqu’une quantité ou expression un peu longue est utilisée fréquemment au cours d’une preuve. Par exemple, une expression comme $\frac{e^\alpha + 1}{\alpha^2 + 1}$, où le réel α a déjà été introduit proprement, peut être remplacé par une constante K pour gagner en légèreté et en concision.

Pour donner le nom K à la quantité $\frac{e^\alpha + 1}{\alpha^2 + 1}$, on écrit :

"On pose $K = \frac{e^\alpha + 1}{\alpha^2 + 1}$.”

"On note K le réel $\frac{e^\alpha + 1}{\alpha^2 + 1}$.”

Dans le même ordre d’idée, vous pouvez aussi poser vos propres fonctions.

Lorsque vous introduisez un objet (variable, variable muette ou constante), il faut s’assurer que le symbole que vous utilisez soit “libre”, càd qu’il ne soit pas déjà employé pour désigner un autre objet. On ne peut donc pas écrire “$\sum_{k=0}^{k} (\dots)$” car le symbole k joue deux rôles différents.

Enfin, un énoncé peut tout à fait introduire ses propres constantes ou variables, voire même (s’il est vicieux...) changer les notations de constantes universelles. Dans tous les cas, vous devez vous y conformer et respecter cette notation (sauf pour les variables muettes). Il y a sûrement une bonne raison qui ne se voit pas de prime abord.

4 Montrer une proposition du type "$\forall x \in E \quad P(x)$"

Méthode (Rédaction avec un "$\forall$")

Pour montrer une assertion du type $\boxed{\forall x \in E \quad P(x)}$, on écrit SYSTÉMATIQUEMENT :

$$\begin{array}{ll} \text{Soit } x \in E. & \big\}\text{On introduit la variable } x \\ \text{Montrons que } P(x). & \big\}\text{Facultatif en général} \\ \vdots & \\ \vdots & \Big\}\text{Preuve de } P(x) \end{array}$$

Le début de la preuve est donc très balisé : on traduit le quantificateur $\forall$ par "Soit" ou "Pour tout" sans se poser de question. La difficulté vient ensuite de prouver $P(x)$, ce qui peut nécessiter un travail de recherche au brouillon.

Exemple. Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$

5 Montrer une proposition du type "$\exists x \in E \quad P(x)$"

Pour montrer qu'il existe (au moins) un élément d'un ensemble qui vérifie une propriété, il faut d'abord trouver un tel élément puis on le stocke dans une constante avec "On pose".

Méthode (Rédaction avec un "$\exists$")

Pour montrer une assertion du type $\boxed{\exists x \in E \quad P(x)}$, une fois qu'on a trouvé un objet x qui convient, on écrit systématiquement :

$$\begin{array}{ll} \text{On pose } x = (\ldots) \in E. & \Big\}\begin{array}{c}\text{On exhibe l'objet } x \text{ qu'on a trouvé} \\ \text{et on vérifie qu'il appartient bien à } E\end{array} \\ \text{Vérifions que } P(x). & \big\}\text{Facultatif en général} \\ \vdots & \\ \vdots & \Big\}\text{Preuve de } P(x) \end{array}$$

Contrairement à la section précédente, vérifier $P(x)$ est assez simple. La difficulté principale se situe au début, lorsqu'on doit trouver un objet x qui convient. Là encore, il faut le plus souvent entreprendre une phase de recherche au brouillon pour trouver un bon x, et hélas il n'y a pas de méthode infaillible. On y reviendra cependant dans le raisonnement par analyse-synthèse.

Remarque. Pour les propositions qui contiennent plusieurs quantificateurs, le principe est le même, il faut y aller pas à pas, dans l'ordre où les quantificateurs apparaissent.

Exemple. Montrer que : $\forall n, m \in \mathbb{N}^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \qquad N > n + \dfrac{1}{m}$

6 Montrer l'unicité d'un objet vérifiant une propriété

Si on considère l'assertion "Il **existe** un **unique** élément de E qui vérifie P", il faut bien comprendre que l'existence d'un élément qui vérifie P et l'unicité d'un tel élément sont deux notions radicalement différentes et indépendantes.

Existence	Unicité	Existence et unicité
Il y a **AU MOINS UN** élément de E qui vérifie P.	Il y a $\boxed{\textbf{AU PLUS UN}}$ élément de E qui vérifie P (ou bien 0 élément, ou bien 1 élément)	Il y a **EXACTEMENT UN** élément de E qui vérifie P.
$\exists x \in E \qquad P(x)$	$\forall x, x' \in E \qquad \big(P(x) \text{ et } P(x')\big) \implies x = x'$	$\exists! x \in E \qquad P(x)$

Pour montrer l'unicité, une façon de faire est donc de considérer x et x' deux éléments quelconques de E qui vérifient P et ensuite de montrer qu'ils désignent, en fait, le même élément. C'est cela, l'unicité[2]. On peut donc déduire la méthode suivante :

Méthode (Preuve de l'unicité d'un objet)

Pour montrer qu'un ensemble E contient **AU PLUS UN** élément vérifie une propriété P, on peut écrire :

Soit $x, x' \in E$.
Supposons que $P(x)$ et $P(x')$.
Montrons que $x = x'$. } Facultatif en général
⋮
⋮ } Preuve que $x = x'$

2. On peut aussi raisonner par l'absurde en considérant x et x' distincts qui vérifient P, mais c'est plus lourd à rédiger.

Cette méthode est peu utile en début d'année, mais elle devient cruciale ensuite !

Attention, cette méthode permet de prouver l'unicité d'un élément de E qui vérifie P, mais elle ne donne en aucun cas l'existence d'un tel élément. "Au plus un" ne signifie pas "exactement un". Si vous cherchez à montrer qu'il existe un unique élément de E vérifiant P, on peut montrer l'existence d'une part et l'unicité d'autre part (dans l'ordre que vous voulez).

Exemple. Montrer l'unicité d'un entier naturel n tel que $n^2 = 3$. *(on demande l'unicité, pas l'existence !)*

L'exemple ci-dessus peut sembler saugrenu, mais de telles situations sont très fréquentes. Par exemple, on verra que pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il y a unicité de la limite. Cela ne veut pas dire que la limite existe : certaines suites n'ont en effet aucune limite, comme la suite de terme général $(-1)^n$. Par contre, pour toute suite, il y a *au plus* une valeur qui sera sa limite (une suite ne peut pas avoir deux limites différentes).

7 Montrer une implication (directement ou par contraposée)

Rappelons que l'assertion $P \implies Q$ se traduit en français par "*Si* P est vraie, *alors* Q est vraie". Il faut donc *supposer* que P est vraie, et *en déduire* que Q est vraie.

Méthode (Preuve par implications directes / successives)

Pour montrer de manière directe une assertion du type "$P \implies Q$", on écrit :

$$\begin{array}{ll} \text{Supposons } P. & \\ \text{Montrons } Q. & \big\}\text{Facultatif en général} \\ \vdots & \\ \vdots & \Big\}\text{Preuve de } Q \end{array}$$

On peut également être plus concis, en montrant plusieurs implications successives (qui doivent toutes être justifiées !) :

$$\begin{aligned} P &\implies \dots \\ &\implies \dots \\ &\implies Q \end{aligned}$$

Une autre méthode consiste à passer par la contraposée, c'est-à-dire montrer que non$Q \implies$ non$P$. Dans ce cas, on précise bien qu'on raisonne par contraposée :

Méthode (Preuve par contraposée)

Pour montrer par contraposée une assertion du type "$P \implies Q$", on écrit :

Par contraposée, supposons non$Q$.

Montrons non$P$. } Presque obligatoire !

$\vdots$

$\vdots$ } Preuve de non$P$

D'où $P \implies Q$ (par contraposée).

Exemple 1. Soit x, y deux réels. Montrer que $xy = 1 \implies x \neq 0$.

8 Montrer une équivalence (directement ou par double implication)

Pour montrer une équivalence, il est très fréquent et efficace de raisonner par double implication. Il faut obligatoirement le préciser au début de votre raisonnement.

Méthode (Preuve par double implication)

Pour montrer par double implication une assertion du type "$P \iff Q$", on écrit :

On raisonne par **double implication**.

$*$ Supposons P. Montrons Q.

$\vdots$

$\vdots$ } Preuve de Q

D'où $P \implies Q$.

$*$ Supposons Q. Montrons P.

$\vdots$

$\vdots$ } Preuve de P

D'où $Q \implies P$.

Finalement, on a bien $P \iff Q$ } Conclusion

Remarque. Les astérisques $*$ ci-dessus permettent de structurer votre propos, mais aussi de bien délimiter la portion de preuve où vous supposez P, celle où vous supposez Q, et enfin le reste de la preuve où ni P ni Q ne sont supposés vraies a priori. Et en plus, ça fait chic. Vous pouvez ajouter votre petite touche personnelle en remplaçant l'astérisque $*$ par un autre symbole (♦, •, ▶, etc.)

Exemple 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n est pair $\iff$ n^2 est pair.

Pour montrer $P \iff Q$, on peut aussi, plus rarement, raisonner de manière directe, par équivalences successives (qui doivent toutes être justifiées !) :

$$\begin{aligned} P &\iff \dots \\ &\iff \dots \\ &\iff Q \end{aligned}$$

9 Montrer une inclusion ou une égalité d'ensembles

Le principe est en fait très similaire aux deux sections précédentes. Il faut juste adapter le vocabulaire lorsqu'on manipule des ensembles. On a vu que $E \subset F$ équivaut à : $\forall x \in E \qquad x \in F$. On peut donc traduire cela mathématiquement

Méthode (Preuve de $E \subset F$)

Pour montrer que $E \subset F$, on écrit

$$\begin{array}{ll} \text{Soit } x \in E & \\ \text{Montrons que } x \in F. & \left.\vphantom{X}\right\}\text{Facultatif en général} \\ \quad\vdots & \left.\vphantom{\begin{array}{c}X\\X\end{array}}\right\}\text{Preuve de } x \in F \\ \quad\vdots & \end{array}$$

Enfin, pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, il suffit de procéder par double implication en montrant que $E \subset F$ et $F \subset E$.

Méthode (Preuve par double inclusion)

Pour montrer par double inclusion l'égalité de deux ensembles E et F, on écrit :

On raisonne par **double inclusion**.

$*$ Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$.

$$\left.\begin{array}{l}\vdots \\ \vdots\end{array}\right\} \text{Preuve de } x \in F$$

D'où $E \subset F$.

$*$ Soit $x \in F$. Montrons que $x \in E$.

$$\left.\begin{array}{l}\vdots \\ \vdots\end{array}\right\} \text{Preuve de } x \in E$$

D'où $F \subset E$.

Finalement, on a bien $E = F$. } Conclusion

10 Raisonnement par récurrence

Ce raisonnement est un grand classique. Si le principe en trois étapes est connu (initialisation, hérédité, conclusion), la rédaction demande un certain doigté et une rigueur appuyée.

Méthode (Récurrence simple)

Quand on veut montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad H_n$ on rédige ainsi :

$*$Initialisation : .... } On vérifie que H_0 est vraie

$*$Hérédité : **Soit** $n \in \mathbb{N}$. **Supposons** H_n.
Montrons H_{n+1}.

$$\left.\begin{array}{l}\vdots \\ \vdots\end{array}\right\} \text{Preuve de } H_{n+1} \text{ grâce à } H_n$$

$*$Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a H_n } Conclusion

Remarque. Attention aux écueils de rédaction en début d'hérédité :

- Commencer par "Supposons H_n (vraie) *pour tout* $n \in \mathbb{N}$" est une faute grave ! Cela revient à écrire "Supposons $\forall n \in \mathbb{N} \quad H_n$", or... c'est justement ce qu'on cherche à démontrer ! C'est un contre-sens logique.
- On trouve également la rédaction "Supposons H_n (vraie) *pour un certain* $n \in \mathbb{N}$". Il y a ici une ambiguité avec la locution "un certain n". Un mathématicien pourrait comprendre cette phrase comme "Supposons qu'il existe un (certain) $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit vraie", c'est-à-dire comme "Supposons $\exists n \in \mathbb{N} \quad H_n$".

Les méthodes pour les récurrences double et forte s'adaptent sur le même principe. On va les étudier sur des exemples.

Exemple 3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Exemple 4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \end{cases}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 2^{n-1}$.

11 La disjonction de cas

Comme dit au chapitre 1, pour montrer une propriété dans un cas général, il peut être fructueux de traiter successivement un certain nombre de cas particuliers qui recouvrent tous les cas possibles. En termes de rédaction, il faut clairement délimiter la zone qui correspond à chaque cas (cela peut se faire avec des $*$ par exemple).

Plus généralement, si vous ne savez pas par où commencer pour démontrer une propriété du type $\quad \forall x \in E \quad P(x) \quad$, il faut en premier lieu considérer des **valeurs particulières** pour x : par exemple, si $E = \mathbb{Z}$, essayez de montrer $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$, etc. Cela peut vous aiguiller sur une méthode pour prouver le cas général. Même sur une copie, traiter quelques cas particuliers vaut des points !

Exemple 5. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 - n$ est pair.

12 Donner un contre-exemple

On veut montrer qu'une assertion de la forme $\quad \forall x \in E \quad P(x) \quad$ est *fausse*. Pour cela, on peut montrer que sa négation est vraie, donc démontrer : $\quad \exists x \in E \quad \mathrm{non}P(x) \quad$ Ainsi, il suffit de trouver un élément $x_0 \in E$ pour lequel $P(x_0)$ est fausse. Un seul suffit ! Un tel x_0 est appelé un contre-exemple.

Exemple 6. L'assertion $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x(1-x) \leq 0 \quad$ est-elle vraie ?

13 Raisonner par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition P est vraie, on peut **supposer (par l'absurde)** que non$P$ est vraie et aboutir à une assertion fausse, donc obtenir une contradiction logique. Cela permet d'affirmer que non$P$ (qui était supposée vraie) est en fait fausse. Conclusion : P est vraie.

Méthode (Preuve par l'absurde)

Pour montrer que P est vraie en raisonnant par l'absurde, on écrit :

Supposons par l'absurde que non$P$ (est vraie)

$\left.\begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \end{array}\right\}$ Obtention d'une contradiction.

Contradiction. Donc P est vraie.

Le raisonnement par l'absurde est particulièrement efficace quand on veut montrer qu'un objet *ne vérifie pas* une propriété, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{n+1}$ n'est pas un entier.

14 Raisonner par analyse-synthèse

On considère une assertion $P(x)$ qui dépend d'une variable $x \in E$. On souhaite déterminer TOUTES les valeurs de x dans E pour lesquelles $P(x)$ est vraie. On peut réaliser un raisonnement en trois parties : analyse, synthèse et conclusion.

1. Analyse : on part d'un élément $x \in E$. On montre que s'il vérifie $P(x)$, alors ce x n'est pas n'importe qui : on déduit des conditions qui permettent de **réduire le champ des possibles** pour x. Il arrive même qu'il n'existe qu'une seule valeur possible pour x.
2. Synthèse : on vérifie, pour chaque valeur de x trouvée en analyse, lesquelles sont bien dans E et vérifient effectivement $P(x)$. L'analyse livre une liste de valeurs "candidates" et la synthèse permet de **vérifier quelles valeurs sont effectivement solutions**.
3. Conclusion : on donne l'ensemble de toutes les solutions trouvées, qu'on note $\mathcal{S}$.

Méthode (Raisonnement par analyse-synthèse)

Pour trouver les éléments x dans E qui vérifient $P(x)$ par analyse-synthèse, on écrit :

On raisonne par analyse-synthèse.

$*$**Analyse :** soit $x \in E$ qui vérifie $P(x)$.

$\vdots$

$\vdots$ } Obtention de conditions sur x.

$*$**Synthèse :**

Pour $x = \dots$ [on vérifie si $x \in E$ et si $P(x)$]

Pour $x = \dots$ [on vérifie si $x \in E$ et si $P(x)$]

$\vdots$ } Pour chaque valeur trouvée en analyse, on vérifie si ça marche.

$*$**Conclusion :** $\mathcal{S} = \dots$ } On donne les solutions.

Bien souvent, $P(x)$ est une équation dont on cherche toutes les solutions appartenant à un ensemble E.

Exemple 8. Résoudre l'équation $x+1=\sqrt{2x+5}$ dans $\mathbb{R}$.