

Invasion et coopération : une vitesse anormale ?

Gwenaël Peltier

Sommaire

- 1 Préliminaires
- 2 Présentation du problème
- 3 Etat de l'art - Cas linéaire ($p = 1$)
- 4 Extension au cas non linéaire ($p \neq 1$)

Sommaire

- 1 Préliminaires
- 2 Présentation du problème
- 3 Etat de l'art - Cas linéaire ($p = 1$)
- 4 Extension au cas non linéaire ($p \neq 1$)

Qu'est-ce qu'une équation de réaction-diffusion ?

Soit $u(t, x)$ la densité d'une population structurée selon le temps $t \geq 0$ et l'espace $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{variation en temps} \\ \text{de la densité} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{déplacement} \\ \text{des individus} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{phénomènes de} \\ \text{naissance et mort} \end{array} \right\}$$

$$u_t = \underbrace{u_{xx}}_{\text{diffusion}} + \underbrace{f(u)}_{\text{réaction}}.$$

Invasion en espace

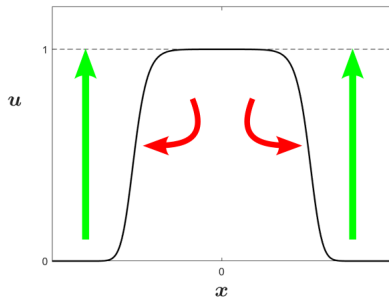
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u(1-u), \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad 0 \leq u_0 \leq 1.$$

Si uniquement **diffusion**, $u(t, x)$ s'étale en espace mais conserve sa masse.

Si uniquement **réaction**, $u(t, x) \rightarrow 1$ mais sans déplacement en espace.

Avec **diffusion** + **réaction**, l'espèce $u(t, x)$ **envahit** l'espace :

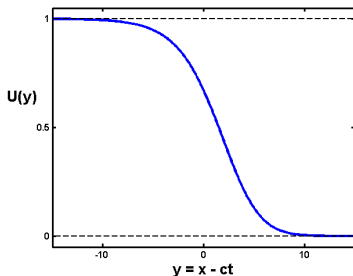
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 1.$$



Invasion avec un profil de front

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + \alpha u(1 - u), & d, \alpha > 0, \\ u(0, x) = \mathbf{1}_{\{x \leq 0\}}(x). \end{cases}$$

En temps long, la solution $u(t, x)$ converge vers un front $U = U(x - ct)$, qui se déplace vers la droite à la vitesse $c := 2\sqrt{d\alpha} > 0$:



Profil asymptotique de u dans une fenêtre se déplaçant à vitesse c^* .

Sommaire

- 1 Préliminaires
- 2 Présentation du problème
- 3 Etat de l'art - Cas linéaire ($p = 1$)
- 4 Extension au cas non linéaire ($p \neq 1$)

Modèle étudié

On considère deux espèces $u(t, x)$ et $v(t, x)$ en interaction selon le système couplé suivant :

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + \alpha u(1 - u) + \beta v^p(1 - u), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ v_t = v_{xx} + v(1 - v), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = v(0, x) = \mathbf{1}_{\{x \leq 0\}}(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (\text{E})$$

avec $d, \alpha, \beta, p > 0$.

Ainsi, l'espèce v change indépendamment de u ...

... mais u est aidé par v selon le terme de couplage $\beta v^p(1 - u)$.

Le cas $\beta = 0$

Si $\beta = 0$, le système (E) est découplé en deux équations qu'on a vues :

$$\begin{aligned} u_t &= du_{xx} + \alpha u(1-u) \quad \cancel{+ \beta v^p(1-u)}, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ v_t &= v_{xx} + v(1-v), & t > 0, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Asymptotiquement, u et v se propagent donc respectivement aux vitesses

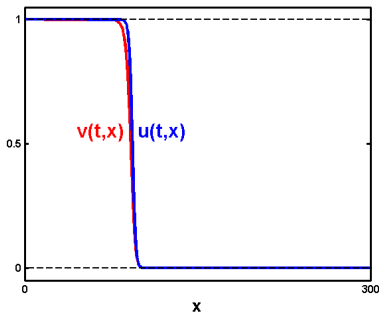
$$c_u := 2\sqrt{d\alpha}, \quad c_v := 2.$$

Si $\beta \neq 0$, v se propage encore à vitesse c_v ...

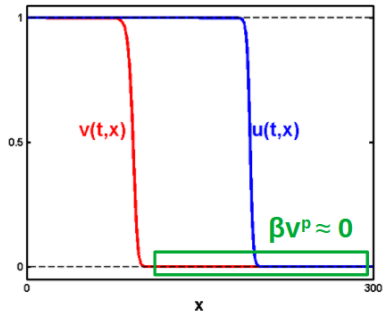
mais à quelle vitesse $s_u = s_u(d, \alpha, \beta, p) > 0$ se propage u ?

$\beta \neq 0$: que vaut s_u ?

Conjecture : $s_u = \max(c_v, c_u) = \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$:



Cas $c_u \ll c_v$. v impose sa vitesse à u
par le terme de couplage : $s_u = c_v$.



Cas $c_u \gg c_v$. u dépasse v et atteint
un environnement où le couplage
est quasi nul ($v \approx 0$) : $s_u = c_u$.

$\beta \neq 0$: vitesse anormale s_u

La conjecture est **fausse** ! Par exemple pour $p = 1$, et $d = \alpha^{-1} < 1$, on a $c_u = c_v$ et pourtant des simulations numériques donnent $s_u > c_u$.

De même, pour des paramètres où $c_u > c_v$, bien que u dépasse v et arrive dans un environnement où $\beta v^p \ll 1$, le fait qu'il y ait très peu de v aide quand même u à atteindre une vitesse $s_u > c_u$.

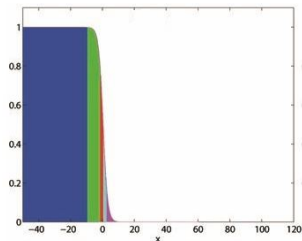
En plus, la valeur de s_u ne dépend pas de β , c'est-à-dire de l'intensité du couplage ! On parle alors de vitesse **anormale**.

Sommaire

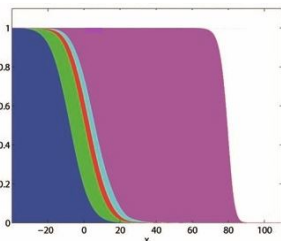
- 1 Préliminaires
- 2 Présentation du problème
- 3 Etat de l'art - Cas linéaire ($p = 1$)**
- 4 Extension au cas non linéaire ($p \neq 1$)

Fronts tirés et poussés

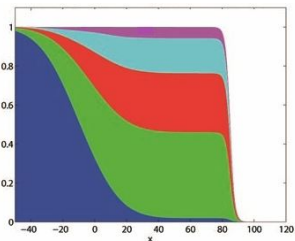
Les fronts de (E) sont des fronts **tirés**, i.e. leur dynamique est régie par la population dans la queue du front :



Compartimentage de la donnée initiale.



Propagation d'un front **tiré** : la queue décide.



Propagation d'un front **poussé** : l'arrière décide.

En fronts tirés, linéariser en $(u, v) = (0, 0)$, i.e. à l'avant du front, va nous fournir un bon prédicteur de la vitesse s_U .

Le cas $p = 1$: linéarisation

On linéarise le système (E) autour du point d'équilibre $(u, v) = (0, 0)$:

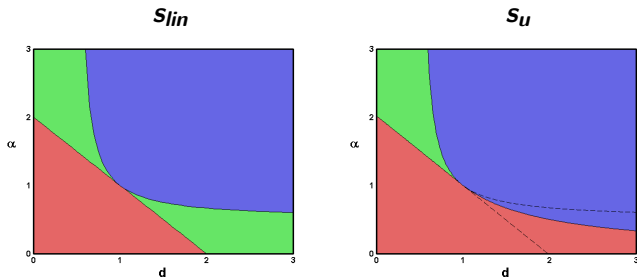
$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + \alpha u + \beta v, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ v_t = v_{xx} + v, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = v(0, x) = \mathbf{1}_{\{x \leq 0\}}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (E_{lin})$$

Par la théorie des fonctions de Green, on peut déterminer la vitesse asymptotique de u dans (E_{lin}) , qu'on note

$$s_{lin} = \begin{cases} c_v = 2, & \alpha + d \leq 2, \\ c_u = 2\sqrt{d\alpha}, & d > \frac{1}{2} \text{ et } \alpha \geq \frac{d}{2d-1}, \\ s_{anorm} := \sqrt{\frac{\alpha-1}{1-d}} + \sqrt{\frac{1-d}{\alpha-1}} > \max(c_u, c_v), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le cas $p = 1$: vitesse s_u

s_{lin} (vitesse de u dans (E_{lin})) : bon prédicteur de s_u (vitesse de u dans (E)).



En rouge, la vitesse vaut $c_v = 2$, en bleu, $c_u = 2\sqrt{d\alpha}$, en vert $s_{anorm}(d, \alpha)$.

s_{anorm} arrive par résonance entre les modes de décroissance des fronts u , v .

Cette résonance n'arrive pas dans (E) si $d > 1$ (en 2 mots car u diffuse alors plus que v). Mais elle arriverait si on avait $v_t = [\dots] + \beta u(1 - v)$.

Sommaire

- 1 Préliminaires
- 2 Présentation du problème
- 3 Etat de l'art - Cas linéaire ($p = 1$)
- 4 Extension au cas non linéaire ($p \neq 1$)

Le cas $p \neq 1$: pseudo-linéarisation

La linéarisation de $\beta v^p(1-u)$ n'a plus de sens. *Pseudo-linéarisation* : on le remplace par βv^p . On fait aussi le changement de variable $y = x - st$:

$$\begin{cases} u_t = du_{yy} + su_y + \alpha u + \beta v^p, & t > 0, y \in \mathbb{R}, \\ v_t = v_{yy} + sv_y + v, & t > 0, y \in \mathbb{R}, \\ u(0, y) = v(0, y) = \mathbf{1}_{\{y \leq 0\}}(y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si $\beta = 0$, les solutions seraient :

$$\begin{aligned} u(t, y) &= e^{\lambda_u t} e^{\nu_u y}, & \lambda_u \in \mathbb{C}, \nu_u \text{ solution de } d\nu_u^2 + s\nu_u + \alpha - \lambda_u &= 0, \\ v(t, y) &= e^{\lambda_v t} e^{\nu_v y}, & \lambda_v \in \mathbb{C}, \nu_v \text{ solution de } \nu_v^2 + s\nu_v + 1 - \lambda_v &= 0. \end{aligned}$$

Résonance entre modes

Ainsi, $u = e^{\lambda_u t} e^{\nu_u y}$ et $v = e^{\lambda_v t} e^{\nu_v y}$ sont solutions si

$$\nu_u = \nu_u^\pm := \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4d(\alpha - \lambda_u)}}{2}, \quad \nu_v = \nu_v^\pm := \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4(1 - \lambda_v)}}{2}.$$

Chaque front s'obtient par une résonance entre un mode + et un mode -.

Exemple : pourquoi $c_v = 2$ pour l'équation en v

Ce front correspond à la résonance $\nu_v^+ = \nu_v^-$, qui implique $s^2 = 4(1 - \lambda_v)$.

Or, si s est la vitesse exacte du front, alors dans la fenêtre $y = x - st$, $v = e^{\lambda_v t} e^{\nu_v y}$ ne doit ni croître, ni décroître en temps. Ainsi, $\text{Re}\lambda_v = 0$. Cela entraîne $s^2 = 4$ (car s est réel) : on retrouve $s = c_v = 2$.

De même si $\beta = 0$, alors la résonance $\nu_u^+ = \nu_u^-$ mène à $s = c_u = 2\sqrt{d\alpha}$.

Résonance entre modes (2)

On a vu deux résonances possibles :

$$\nu_v^+(s, \lambda_v) = \nu_v^-(s, \lambda_v), \quad \nu_u^+(s, \lambda_u) = \nu_u^-(s, \lambda_u).$$

Si $\beta \neq 0$ et $p = 1$ on peut aussi avoir $\nu_u^\pm(s, \lambda_u) = \nu_v^\mp(s, \lambda_v)$. Alors :

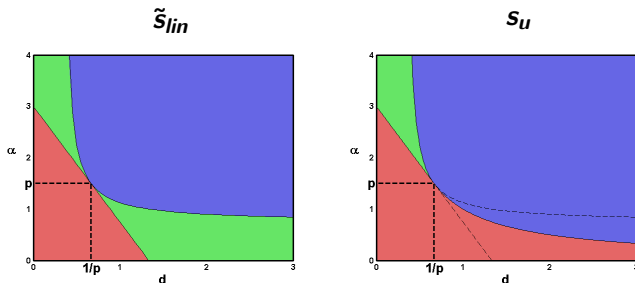
$$s_{lin} = \inf \left\{ s > 0 \mid \text{toutes les résonances } \color{red}{//} \color{blue}{//} \text{ arrivent pour } \operatorname{Re}\lambda_u, \operatorname{Re}\lambda_v \leq 0 \right\}.$$

Et on peut alors déduire s_u par des méthodes classiques de fronts tirés.

Si $\beta \neq 0$ et $p \neq 1$ la pseudo-linéarisation conduit à considérer des résonances $\nu_u^\pm = p\nu_v^\mp$. On obtient alors une vitesse "pseudo-linéaire" \tilde{s}_{lin} .

Le cas $p \neq 1$: vitesse s_u

\tilde{s}_{lin} est aussi un bon prédicteur de s_u . Exemple pour $p = 1.5$:



En rouge, la vitesse vaut $c_v = 2$, en bleu, $c_u = 2\sqrt{d\alpha}$, en vert $s_{anorm}(d, \alpha, p)$.

Une fois qu'on a "prédit" $s_u = s_u(d, \alpha, p)$, on prouve que u se propage à cette vitesse par la théorie des sur- et sous-solutions : on construit $\bar{u}(t, x)$, $\underline{u}(t, x)$, qui se propagent à vitesse s_u et on montre que $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$.

Le résultat principal

Par pseudo-linéarisation et la théorie des sur- et sous-solutions, on a pu généraliser le théorème suivant du cas $p = 1$ au cas $p > 0$:

Théorème 1

Dans le système non linéaire (E), la vitesse de u est donnée par :

$$s_u = \begin{cases} c_v = 2, & \alpha \leq 2p - dp^2, \\ c_u = 2\sqrt{d\alpha}, & d > \frac{1}{2p} \text{ et } \alpha \geq \frac{dp^2}{2dp-1}, \\ s_{anorm}, & \text{sinon, pour } d < \frac{1}{p}, \\ \max(2, 2\sqrt{d\alpha}), & \text{sinon, pour } d > \frac{1}{p}, \end{cases}$$

avec

$$s_{anorm} := \sqrt{\frac{\alpha - p}{p - dp^2}} + \sqrt{\frac{p - dp^2}{\alpha - p}} > \max(2, 2\sqrt{d\alpha}).$$

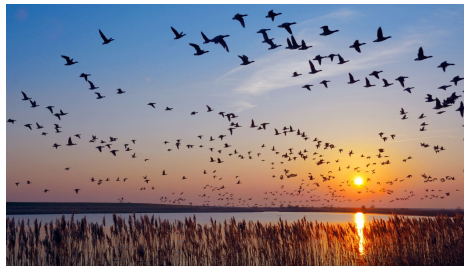
Le rôle de β

s_u peut prendre des valeurs anormales à cause du couplage par $\beta v^p(1-u)$.
 Pourtant, s_u ne dépend jamais de β ! Alors quel est le rôle de β ?

En fait, on observe numériquement que, en temps long,

$$\beta_1 > \beta_0 > 0 \implies u^{\beta_1}(t, x) \approx u^{\beta_0}(t, x + \log(\beta_1 - \beta_0)).$$

Ainsi, les fronts u^{β_1} et u^{β_0} se propagent à la même vitesse, mais u^{β_1} a une avance constante sur u^{β_0} .



Merci de votre attention !

