

# Accélération de l'invasion dans un modèle d'écologie évolutive

Gwenaël Peltier

Intitut Montpelliérain Alexandre Grothendieck (IMAG)  
Université de Montpellier



# Sommaire

- 1 Accélération dans l'équation de Fisher-KPP
- 2 Un modèle d'écologie évolutive
- 3 Accélération dans le modèle évolutif
- 4 Références

## L'équation de Fisher-KPP [1, 2]

$$\begin{cases} \partial_t u - \underbrace{\partial_{xx} u}_{\text{migrations}} = \underbrace{ku(1-u)}_{\text{croissance et compétition}}, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec  $k > 0$  et  $0 \leq u_0 \leq 1$ .

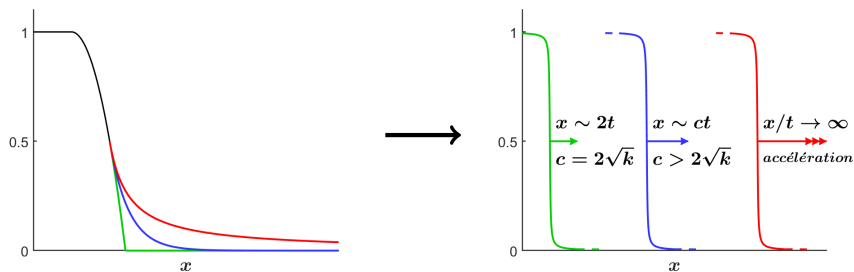
Dès que  $u_0 \not\equiv 0$ , on a survie et invasion de la population :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 1.$$

# Accélération de l'invasion

$$\partial_t u - \partial_{xx} u = ku(1 - u).$$

La vitesse de l'invasion dépend du comportement de  $u_0$  en  $+\infty$ .



**Figure:** Trois profils de données initiales, et la vitesse asymptotique des fronts.  
**Vert** : support compact. **Bleu** : queue exponentielle. **Rouge** : queue lourde.

Si  $u_0$  admet une *queue lourde* en  $+\infty$ , i.e. si  $u_0$  décroît plus lentement que toute exponentielle, alors on a **accélération** du front [3].

# Un modèle d'écologie évolutive

Population  $n(t, x, y)$  structurée selon le temps  $t$ , l'espace  $x \in \mathbb{R}$ , et un trait phénotypique  $y \in \mathbb{R}$  qui influence leur survie :

$$\partial_t n = \underbrace{\partial_{xx} n}_{\text{migrations}} + \underbrace{\partial_{yy} n}_{\text{mutations}} + \left[ \underbrace{r(x, y)}_{\text{croissance}} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} n(t, x, y') dy'}_{\text{compétition}} \right] n,$$

où  $r(x, y) = 1 - A(y - Bx)^2$ , avec  $A, B > 0$ .

Le trait optimal pour la survie dépend donc de la position :  $y_{opt}(x) = Bx$ .

Invasion dans la direction  $y = Bx$ 

$$\partial_t n - \partial_{xx} n - \partial_{yy} n = [r(x, y) - \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y') dy'] n$$

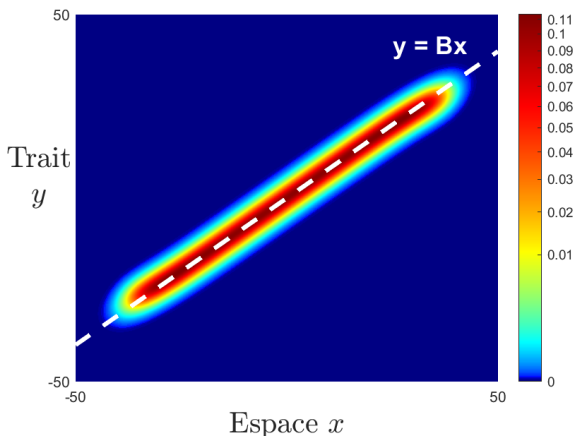


Figure:  $n(t, \cdot, \cdot)$  pour  $t = 30s$ , avec  $n_0$  à support compact,  $A = 0,02$  et  $B = 0,8$ .

## Extinction ou invasion à vitesse finie

$$\partial_t n - \partial_{xx} n - \partial_{yy} n = [r(x, y) - \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y') dy'] n$$

On définit l'ensemble de niveau  $\mu > 0$  de  $n$  par

$$E_{\mu}^n(t) := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy = \mu \right\}.$$

On pose  $\lambda_0 := \sqrt{A(1 + B^2)} - 1$ , la v.p. principale de  $\mathcal{L}w = -\Delta_{x,y} w - r w$ .

**Théorème 1 (Alfaro, Berestycki, Raoul [4, 5])**

Si  $\lambda_0 \geq 0$ , on a extinction :  $\|n(t, \cdot, \cdot)\|_{\infty} \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Si  $\lambda_0 < 0$  et  $n_0 \not\equiv 0$  est à support compact, alors

$$\exists \beta > 0 \quad \forall \mu \in ]0, \beta[ \quad \sup E_{\mu}^n(t) \sim \omega^* t, \quad \omega^* := 2\sqrt{\frac{-\lambda_0}{1 + B^2}} > 0.$$

# Problème posé

$$\partial_t u - \partial_{xx} u = ku(1-u) \quad \begin{cases} \text{Supp } u_0 \text{ compact} & \implies E_\lambda(t) \sim 2\sqrt{k} t \\ u_0 \text{ à queue lourde} & \implies E_\lambda(t)/t \rightarrow +\infty \end{cases}$$

où  $E_\lambda(t) := \{x \in \mathbb{R} \mid u(t, x) = \lambda\}$

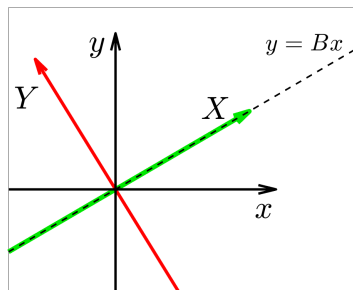
$$\partial_t n - \partial_{xx} n - \partial_{yy} n = \dots \quad \begin{cases} \text{Supp } n_0 \text{ compact} & \xRightarrow{\lambda_0 < 0} E_\mu^n(t) \sim \omega^* t \\ n_0 \text{ "à queue lourde"} & \implies E_\mu^n(t)/t \rightarrow ??? \end{cases}$$

- Q1 : condition sur  $n_0$  capable de faire accélérer la solution ?
- Q2 : encadrement de  $E_\mu^n(t)$  quand  $t \rightarrow +\infty$  ?



# Un changement de variables

On fait une rotation du repère  $(x, y) \rightarrow (X, Y)$ , de sorte que  $X$  soit dirigé selon la droite  $y_{opt} = Bx$  :



En posant  $v(t, X, Y) = n(t, x, y)$ , l'équation sur  $n$  devient

$$\partial_t v - \partial_{XX} v - \partial_{YY} v = \left[ \tilde{r}(Y) - \int_{\mathbb{R}} (\dots) \right] v.$$

On notera  $\Gamma_0(Y)$  la f.p. principale de  $-\partial_{YY} - \tilde{r}(Y)$  associée à  $\lambda_0$ .

## Condition pour une accélération

$$\partial_t v - \partial_{XX} v - \partial_{YY} v = [\tilde{r}(Y) - f_{\mathbb{R}}(\dots)] v.$$

### Théorème 2 (accélération dans le modèle évolutif)

On suppose que  $\lambda_0 < 0$  et  $v_0(X, Y) = n_0(x, y)$  vérifie

$$\exists \sigma > 0 \quad v_0(X, Y) \geq \underline{u}_0(X) \mathbf{1}_{[-\sigma, \sigma]}(Y),$$

avec  $\underline{u}_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$  à queue lourde. Alors il y a accélération :

$$\exists \beta > 0 \quad \forall \mu \in ]0, \beta[ \quad \frac{1}{t} \inf E_\mu^n(t) \rightarrow +\infty.$$

Encadrement de  $E_\mu^n(t)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ Théorème 3 (encadrement de  $E_\mu^n(t)$ )

On suppose que  $\lambda_0 < 0$  et

$$\exists \sigma > 0 \quad \underline{u}_0(X) \mathbf{1}_{[-\sigma, \sigma]}(Y) \leq v_0(X, Y) \leq \bar{u}_0(X) \Gamma_0(Y),$$

avec  $\underline{u}_0, \bar{u}_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$  à queue lourde (...). Alors :

$$\forall \underline{\varepsilon} < |\lambda_0|, \quad \exists \beta > 0, \quad \forall \mu < \beta, \quad \forall \bar{\varepsilon} < |\lambda_0|, \quad \forall \Gamma, \gamma > 0, \quad \exists T \geq 0, \quad \forall t \geq T,$$

$$E_\mu^n(t) \subset \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} \left[ \min \underline{u}_0^{-1} \left( \Gamma e^{-(\lambda_0 - \underline{\varepsilon})t} \right), \max \bar{u}_0^{-1} \left( \gamma e^{-(\lambda_0 + \bar{\varepsilon})t} \right) \right].$$

Exemple :  $\underline{u}_0(X) \underset{X \gg 1}{=} 1/X^\alpha \implies \inf E_\mu^n(t) \geq e^{C(\underline{\varepsilon})t/\alpha}$  pour  $t$  assez grand.

Compromis : si  $\underline{\varepsilon} \ll 1$ , l'encadrement est plus précis, mais  $\beta = \beta(\underline{\varepsilon}) \ll 1$ .

# Références

- [1] Fisher, R. A. (1937). The wave of advance of advantageous genes. *Annals of eugenics*, 7(4), 355-369.
- [2] Kolmogorov, A., Petrovskii, I., and Piscounov, N (1937). Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 1:1 25.
- [3] Hamel, F., & Roques, L. (2010). Fast propagation for KPP equations with slowly decaying initial conditions. *J. Differential Equations*, 249, 1726-1745
- [4] Alfaro, M., Coville, J., & Raoul, G. (2013). Travelling waves in a nonlocal reaction-diffusion equation as a model for a population structured by a space variable and a phenotypic trait. *Communications in Partial Differential Equations*, 38(12), 2126-2154.
- [5] Alfaro, M., Berestycki, H., & Raoul, G. (2017). The Effect of Climate Shift on a Species Submitted to Dispersion, Evolution, Growth, and Nonlocal Competition. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 49(1), 562-596.