Structures algébriques

Exercice 1 (Calcul dans un groupe)**.** Soit $(G,\cdot)$ un groupe. Développer et simplifier les expressions suivantes, ou résoudre les équations suivantes, avec $a,b,c,d,x \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$:

1) $(axa^{-1})^{-1}$
2) $(abcd)^{-1}$
3) $(axa^{-1})^{n}$
4) $axa^{-1} = b$
5) $a^n x b^n = c$
6) $a^{-1}x^{-1} = b^{-1}$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$.

Exercice 3. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Montrer que si $1 \in H$, alors $H = \mathbb{Z}$.

Exercice 4. On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $*$ par $a*b = a+b-ab$.

1) Est-ce que $(\mathbb{R},*)$ est un groupe ?
2) Déterminer $z \in \mathbb{R}$ tel que $(\mathbb{R}\setminus\{z\},*)$ soit un groupe.

Exercice 5. Soit $(G,\cdot)$ un groupe et H_1, H_2 deux sous-groupes de G. Montrer que $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de G.
Est-ce que $H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe de G ?

Exercice 6. Soit $(G,\cdot)$ un groupe. On définit le centre de G comme l'ensemble des éléments $a \in G$ qui commutent avec tous les autres éléments de G, c'est-à-dire :

$$C := \{a \in G \mid \forall x \in G \quad ax = xa\}$$

Montrer que C est un sous-groupe de G. Si G est commutatif, que vaut C ?

Exercice 7. On pose T l'ensemble des translations de $\mathbb{C}$ et S l'ensemble des similitudes de $\mathbb{C}$:

$$T = \{t_a \mid a \in \mathbb{C}\} \qquad \text{avec} \qquad t_a : z \mapsto z + a$$

$$S = \left\{\sigma_{a,b} \mid (a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\right\} \qquad \text{avec} \qquad \sigma_{a,b} : z \mapsto az + b$$

Montrer que T et S sont des sous-groupes de $(\mathrm{Bij}(\mathbb{C}),\circ)$, où $\mathrm{Bij}(\mathbb{C})$ est l'ensemble des bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On déterminera d'abord les symétriques de t_a et $\sigma_{a,b}$ pour $\circ$.

Exercice 8 ($\star$)**.** Montrer que tout sous-groupe H de $(\mathbb{Z},+)$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$. Lorsque $H \neq \{0\}$, on pourra poser $n = \min(H \cap \mathbb{N}^*)$.

Exercice 9. Soit $(G,\cdot)$ un groupe et $a \in G$. On pose

$$f_a : \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto ax \end{array} \qquad\qquad g_a : \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto axa^{-1} \end{array}$$

Démontrer que f_a et g_a sont des automorphismes de G.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On pose

$$\begin{aligned} \varphi_n : \mathbb{C}^* &\to \mathbb{C}^* \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$. Est-ce un automorphisme ?
2) En déduire que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

Exercice 11. Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Un élément $x \in A$ est dit <u>nilpotent</u> lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0_A$.

1) Soit $x, y \in A$. Montrer que si x est nilpotent et x, y commutent, alors xy est nilpotent.
2) Soit $x, y \in A$. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors $x + y$ est nilpotent.
3) Soit $x \in A$ nilpotent. Montrer que $1 - x$ est inversible et calculer $(1-x)^{-1}$, où 1 désigne 1_A.

Exercice 12 (Entiers de Gauss)**.** On définit l'ensemble des entiers de Gauss par :

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

1) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ muni des lois $+$ et $\times$ usuelles est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2) Soit $a + bi$ un entier de Gauss inversible. Montrer que $a^2 + b^2 = 1$.
3) En déduire les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
4) Un entier de Gauss x est dit irréductible si, pour tous $y, z \in \mathbb{Z}[i]$,

$$x = yz \implies \left(y \in \mathbb{Z}[i]^\times \text{ ou } z \in \mathbb{Z}[i]^\times\right)$$

   L'entier 2 est-il irréductible ?

Exercice 13. Soit $(G, +)$ un groupe. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G. On définit sur $\mathrm{End}(G)$ les lois $+$ et $\circ$ usuelles : $\quad f + g : x \mapsto f(x) + g(x) \quad$ et $\quad g \circ f : x \mapsto g(f(x))$.

1) Montrer que $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ est un anneau.
2) On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G. Montrer que $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ est un groupe.

Exercice 14 ($\star$)**.** Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que $\quad \forall x \in A \quad x^2 = x$.

Montrer que pour tout $x \in A$, on a $-x = x$. En déduire que A est commutatif.

Exercice 15. Soit X un ensemble. On définit sur $\mathcal{P}(X)$ la loi de différence symétrique notée Δ par :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

1) Montrer que $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ est un anneau (on pourra admettre l'associativité de Δ...).
2) Cet anneau est-il intègre ? Quels sont les éléments inversibles ?

Exercice 16. Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre fini (i.e. de cardinal fini). Soit $a \in A \setminus \{0_A\}$.

1) Montrer que l'application f_a définie ci-dessous est injective :

$$\begin{aligned} f_a : A &\to A \\ x &\mapsto ax \end{aligned}$$

2) Montrer que $f_a(A) = A$ (on pourra raisonner sur le cardinal). En déduire que f_a est bijective.
3) En déduire que A est un corps.