

TD 36 : Univers et probabilités

Probabilité sur un univers

1 ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega = \llbracket -n, n \rrbracket$. On considère l'application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{n+1-|k|}{(n+1)^2}$.

- 1) Montrer que \mathbb{P} est une probabilité sur Ω .
- 2) Déterminer la probabilité de l'événement $A = \llbracket -n+1, n-1 \rrbracket$.

2 ★★ On lance un dé à six faces truqué : la probabilité d'obtenir $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ est proportionnelle à k . Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Il faut d'abord trouver l'expression de $\mathbb{P}(\{k\})$ pour tout k entre 1 et 6.

Dénombrements et probabilités

3 ★★ Soit $b, n \in \mathbb{N}^*$. On tire simultanément deux boules dans une urne qui contient b boules blanches et n boules noires. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées aient la même couleur ?

4 ★★ Un facteur entre dans un immeuble et doit distribuer n lettres, une exactement pour chacune des n boîtes aux lettres. Mais il est pressé et distribue les lettres au hasard : une dans chaque boîte.

- 1) Donner un univers Ω correspondant à cette expérience.
- 2) Quelle est la probabilité que la distribution soit correcte ?
- 3) Quelle est la probabilité que la boîte 1 soit correctement remplie ?
- 4) Quelle est la probabilité que la boîte 1 ne contienne pas de lettre destinée à d'autres boîtes aux lettres ?
- 5) Reprendre les questions précédentes, en supposant cette fois qu'une même boîte est susceptible de recevoir plusieurs lettres, tandis que d'autres peuvent n'en recevoir aucune.

5 ★★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans une loterie, il y a n tickets dont g tickets gagnants ($1 \leq g \leq n$). Quelle est la probabilité d'obtenir un ticket gagnant en achetant a tickets ($1 \leq a \leq n$) ? Traiter de petites valeurs de a pour commencer.

Conditionnement

6 ★★ Un fumeur décide d'arrêter de fumer. Le premier jour (jour 1), il ne fume pas. On suppose ensuite que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

- La probabilité qu'il fume le jour $j+1$ sachant qu'il n'a pas fumé le jour j est égale à $\alpha \in]0, 1[$.
- La probabilité qu'il ne fume pas le jour $j+1$ sachant qu'il a fumé le jour j est égale à $\beta \in]0, 1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « le fumeur n'a pas fumé le jour n », et on note p_n sa probabilité.

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .
- 2) En déduire une expression de p_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 3) Étudier la limite de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

7 ★★ Un candidat répond à un QCM où chaque question comporte n réponses possibles. Soit l'étudiant connaît la réponse et la coche, soit il choisit au hasard une réponse parmi les n proposées. La probabilité que l'étudiant connaisse la réponse est $p \in]0, 1[$.

Si l'étudiant a bien répondu à la question, quelle est la probabilité qu'il y ait répondu en connaissant la réponse ?

8 ★★ Un groupe de colle de 3 élèves passe une colle de maths. Ils doivent chacun répondre à une question de cours, parmi 6 proposées. Le premier élève tire au hasard une des 6 questions, puis le deuxième tire une des 5 restantes et le dernier une des 4 restantes. Vous êtes l'un des élèves et vous avez fait l'impasse sur une des questions. On vous propose de choisir votre place. Choisissez-vous la première ? la deuxième ? ou la troisième ?

Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, poser A_i l'événement « L'élève numéro i a tiré la question qui est une impasse ». L'énoncé demande en substance de comparer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_2)$ et $\mathbb{P}(A_3)$

Indépendance

9 ★ On lance un dé à six faces équilibré. On pose les événements

A : "on obtient 2, 4 ou 6" et B : "on obtient 3 ou 6"

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

10 ★★ Trouver un univers Ω et trois événements A, B, C tels que A et B sont indépendants, A et C sont indépendants mais A et $B \cup C$ ne sont pas indépendants. On peut trouver un cas qui fonctionne avec $\Omega = \{1, \dots, 6\}$. De plus, pour que deux événements soient indépendants, il faut a minima que leur intersection soit non vide (sauf si un des deux événements a une probabilité nulle).

11 ★★★ Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini. Soit A_1, \dots, A_n des événements mutuellement indépendants qui vérifient $\mathbb{P}(A_k) \in]0, 1[$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que $\text{card}(\Omega) \geq 2^n$.

Pour tout $k \in \{0, 1\}$, on pose $A_k^1 = A_k$ et $A_k^0 = \overline{A_k}$. Pour toute famille $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ à valeurs dans $\{0, 1\}$, considérer l'évènement

$$B_\varepsilon = A_1^{\varepsilon_1} \cdots A_n^{\varepsilon_n}$$

On pourra commencer par montrer que ces ensembles B_ε sont tous non vides.