

# TD 35 : Dénombrement

## Dénombrement problématisé

**1** ★ Donner le nombre d'anagrammes (distincts) des mots CHIMIE, SCIENCES, BLABLACAR

Reprendre l'exemple vu en cours.

**2** ★ Soit  $n \geq 2$  un entier. Un tournoi regroupe  $n$  joueurs. Chaque joueur joue contre tous les autres une et une seule fois. Quel est le nombre total de parties jouées au cours du tournoi ?

**3** ★★ Lors de la finale du 100m des mondiaux d'athlétisme, dix coureurs s'élancent. Quatre de ces coureurs sont jamaïcains. Les trois premiers arrivés montent sur le podium dans l'ordre d'arrivée.

- 1) Combien y a-t-il de podiums possibles ?
- 2) Combien y a-t-il de podiums avec uniquement des jamaïcains ?
- 3) Combien y a-t-il de podiums avec au moins un jamaïcain ?
- 4) Combien y a-t-il de podiums avec exactement deux jamaïcains ?

**4** ★★ Un jeu de 52 cartes est composé de 4 couleurs ( $\clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit$ ) et de 13 valeurs (1, 2, 3, ..., 10, V, D, R). Au poker, une main est constituée de cinq cartes prises parmi 52 cartes. Dénombrer les mains qui vérifient les conditions suivantes :

- 1) Quinte Flush Royale : 5 cartes de 9 à R de même couleur.
- 2) Quinte Flush (non royale) : 5 cartes de valeurs consécutives (sauf 9 à R) de même couleur.
- 3) Carré : 4 cartes de même valeur (4 dames par exemple).
- 4) Full : 3 cartes de même valeur et 2 cartes d'une autre valeur (3 rois et 2 valets par exemple).
- 5) Couleur : 5 cartes de même couleur (sans que la main ne forme une Quinte Flush).
- 6) Breton : 3 cartes de même valeur (sans que la main ne forme un Carré ni un Full).
- 7) (★) On introduit un joker (noté J) dans le jeu, qui peut remplacer toute autre carte du jeu (mais une

seule à la fois). Reprendre les questions précédentes dans ce cadre.

**5** ★★ Soit  $n \geq 2$  un entier.

- 1) Combien y a-t-il de transpositions dans  $S_n$  ?
- 2) Combien y a-t-il de double transpositions dans  $S_n$  ?
- 3) On suppose  $n \geq 4$ . Combien y a-t-il de 4-cycles dans  $S_n$  ?
- 4) Soit  $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . Combien y a-t-il de  $p$ -cycles dans  $S_n$  ?

3 Attention au fait qu'un même 4-cycle peut s'écrire de plusieurs manières différentes. Une remarque similaire peut être faite pour toutes les autres questions.

**6** ★★★ Soit  $p, q \in \mathbb{N}$ . On part du point  $(0, 0)$  et on souhaite arriver au point  $(p, q)$  en se déplaçant, à chaque étape, soit d'une unité vers la droite, soit d'une unité vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

## Dénombrement mathématisé

**7** ★ Soit  $E$  un ensemble fini et  $A, B$  deux parties de  $E$ . On suppose que  $\text{card}(E) < \text{card}(A) + \text{card}(B)$ . Montrer que  $A \cap B \neq \emptyset$ .

Raisonner par l'absurde.

**8** ★★ Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ . Déterminer le cardinal des ensembles suivants :

$$E_1 = \left\{ (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i \neq j \right\}$$

$$E_2 = \left\{ (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i < j \right\}$$

$$E_3 = \left\{ (i, j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3 \mid i \leq j \leq k \right\}$$

**9** ★★ Soit  $a, b, n \in \mathbb{N}$ . En développant le polynôme  $(1+X)^{a+b}$  de deux manières, montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

Retrouver cette formule par dénombrement.

- Écrire  $(1+X)^{a+b} = (1+X)^a(1+X)^b$  et identifier les coefficients d'un certain degré en particulier.
- Pour prendre  $n$  personnes parmi  $a+b$ , on peut le faire directement, mais on peut aussi séparer les  $a+b$  personnes en un groupe de  $a$  personnes et un groupe de  $b$  personnes...

**10** ★★★ (Oral CCINP) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E$  un ensemble possédant  $n$  éléments.

- 1) Déterminer le nombre  $a$  de couples  $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$  tels que  $A \subset B$ .
- 2) Déterminer le nombre  $b$  de couples  $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$  tels que  $A \cap B = \emptyset$ .
- 3) Déterminer le nombre  $c$  de triplets  $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$  tels que  $A, B$  et  $C$  soient deux à deux dis-joints et vérifient  $A \cup B \cup C = E$ .

- 1) Combien de choix a-t-on pour  $B$ ? Puis combien de choix a-t-on pour  $A$ ?
- 2) Idem.
- 3) Remarquer que  $A$  et  $B$  étant déterminés,  $C$  est déterminé de manière unique.

### ———— Dénombrement combinatoire (dur) ————

**11** ★★★ Soit  $n \geq 2$  un entier. On note  $E_n$  l'ensemble des matrices réelles de taille  $n$  dont chaque coefficient est dans l'ensemble  $\{0, 1\}$ .

- 1) Combien y a-t-il de matrices de  $E_n$  avec exactement un 1 dans chaque ligne et chaque colonne?
- 2) Combien de matrices de  $E_2$  sont inversibles?
- 3) Déterminer le nombre de matrices  $A$  de  $E_2$  telles que  $A^2 \in E_2$ .

- 1) Raisonner sur chaque colonne séparément, en commençant par la première.

2) Il y a 16 matrices dans  $E_2$ . On peut bien sûr les étudier toutes une par une... Mais on peut aussi se dire qu'une matrice est inversible si et seulement si ses colonnes ne forment pas une famille liée.

**12** ★★★ On considère un échiquier de 8 cases sur 8 cases.

- 1) Combien de tours au maximum peut-on placer sur l'échiquier tout en garantissant qu'aucune tour ne peut en capturer une autre?
- 2) Même question avec des fous.

Considérer de petites tailles d'échiquier, par exemple 4 par 4 pour commencer. Pour justifier que le nombre maximum possible est un nombre  $M$  donné, il faut :

- Trouver un exemple où  $M$  pièces ont été posées. Ceci montre que le maximum est  $\geq M$ .
- Faire une preuve rigoureuse pour justifier que l'on ne peut pas mettre  $M+1$  pièces. Ceci montre que le maximum est  $\leq M$ .