TD 21-22-23 : Polynômes et fractions rationnelles

Degré, dérivation

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver le degré et les coefficients dominants des polynômes suivants :

$$P = (X+1)^n - (X-1)^n \qquad Q = (X(1-X))^n$$

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue(s) $P, Q \in \mathbb{K}[X]$:

1) $Q^2 = XP^2$
2) $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$
3) $P \circ P = P$
4) $XP = P'$
5) $P = XP'$
6) $P = P'P''$

Exercice 3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré de $P(X+1) - P(X)$ en fonction du degré de P.

Exercice 4. Déterminer tous les polynômes P tels que $P(2) = 6$, $P'(2) = 1$ et $P^{(n)}(2) = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$. Montrer que f n'est pas une fonction polynômiale.

Exercice 6. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définie par :

$$P_1 = X - 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{n+1} = P_n^2 - 2$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n, b_n et c_n les coefficients de degré 2, 1 et 0 de P_n.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2) Déterminer le coefficient de degré 0 de P_n, puis le coefficient de degré 1 de P_n.
3) $(\star)$ Déterminer le coefficient de degré 2 de P_n.

Divisibilité de polynômes

Exercice 7. Déterminer $p, q \in \mathbb{R}$ pour que $X^3 + pX + q$ soit divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice 8 (*Classique !*)**.** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$.

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
2) Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $n \geq 2$ un entier. L'objectif est de calculer A^n par une nouvelle méthode dite du "polynôme annulateur".

1) Calculer puis exprimer A^2 en fonction de A et de I_n.
2) Quel est le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$?
3) En déduire A^n.

Exercice 10. On pose $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$.
Déterminer $A \wedge B$ puis un couple de coefficients de Bézout pour A et B.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $A = X^n + 1$ et $B = X^n - 1$. Déterminer $A \wedge B$ et $A \vee B$.

Exercice 12 (***Un grand classique***)**.** Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$.

1) On suppose que $m \mid n$. Montrer que $X^m - 1 \mid X^n - 1$.
2) Montrer que si la division euclidienne de n par m est donnée par $n = mq + r$, alors la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$ est donnée par $X^n - 1 = (X^m - 1)Q + (X^r - 1)$ où Q un polynôme que l'on précisera.
3) $(\star)$ Montrer que $(X^m - 1) \wedge (X^n - 1) = X^{m \wedge n} - 1$.
   Conséquence de la question 3 : $m \wedge n = 1$ si et seulement si $(X^m - 1) \wedge (X^n - 1) = X - 1$.

Racines et factorisation

Exercice 13. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la multiplicité de la racine 1 pour le polynôme $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$?

Exercice 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n := 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n$. Montrer que P_n n'admet pas de racine multiple.

Exercice 15. Montrer que 1 est racine triple de $P = X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1$. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16. Déterminer $m > 0$ de sorte que $P = X^3 - 6X + m$ admette une racine double. Quelle est l'autre racine ?

Exercice 17. Trouver les racines de $P = 8X^3 - 4X^2 - 2X + 1$ sachant que la somme de deux de ses racines fait 1.

Exercice 18. Déterminer les solutions des systèmes suivants :

1) $\begin{cases} a + b = i \\ ab = -2 \end{cases}$ d'inconnues $a, b \in \mathbb{C}$.

2) $\begin{cases} a + b + c = -2 \\ ab + bc + ca = -1 \\ abc = 2 \end{cases}$ d'inconnues $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Indication : pour le second système, on pourra développer le polynôme $P = (X - a)(X - b)(X - c)$.

Exercice 19. Soit $T > 0$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si la fonction $f : x \mapsto P(x)$ est T-périodique, alors P est constant.
Indication : on pourra considérer la fonction $g : x \mapsto P(x) - P(0)$.

Exercice 20. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(n) = n^2$. Montrer que $P = X^2$.

Exercice 21. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 2$, scindé à racines simples. Montrer que P' est scindé à racines simples.
Indication : utiliser le théorème de Rolle.

Exercice 22 ($\star$)**.** Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

1) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(X) - X$ divise $P(X)^k - X^k$.
2) En déduire que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$.
3) En déduire que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 23 ($\star$)**.** 1) Déterminer les polynômes $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q(X+1) - Q(X) = X$

2) En déduire les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \int_k^{k+1} P(t)dt = k$

Polynômes irréductibles

Exercice 24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. Calculer $(X-1)P(X)$. En déduire une décomposition de P en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$.

Exercice 25. Factoriser les polynômes suivants, dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$:

$P_1 = X^4 - 1$	$P_3 = X^3 - 2$	$P_5 = X^5 + X^4$
$P_2 = X^2 + X + 1$	$P_4 = X^4 + X^2 + 1$	$P_6 = X^6 + 1$

Exercice 26. On pose
$$A = X^5 + 6X^3 - 54X^2 - 81X \qquad B = X^4 - 18X^2 + 81$$

1) Calculer $A \wedge B$ et déterminer sa décomposition en produit de polynômes irréductibles.
2) En déduire les décompositions de A et de B.
3) En déduire $A \vee B$.

Exercice 27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le PGCD de $A = X^n - 1$ et de $B = (X-1)^n$.

Exercice 28. Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A^2 \mid B^2$. Montrer que $A \mid B$.

Exercice 29. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) \geq 0$

(ii) $\exists A, B \in \mathbb{R}[X] \qquad P = A^2 + B^2$

Indication : on pourra remarquer que $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$.

Polynômes d'interpolation de Lagrange

Exercice 30. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que

1) $P(1) = 2$, $P(2) = 3$ et $P(3) = 6$.
2) $P(1) = a$, $P(2) = b$ et $P(3) = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Exercice 31. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$:

- $F_1 = \dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$
- $F_2 = \dfrac{2X}{X^4-X^2}$
- $F_3 = \dfrac{1}{X^2(X-1)^2}$
- $F_4 = \dfrac{1}{X^2+X+1}$
- $F_5 = \dfrac{4}{(X^2+1)^2}$
- $F_6 = \dfrac{1}{X^3+1}$
- $F_7 = \dfrac{1}{X^4+X^2+1}$
- $F_8 = \dfrac{X^5+X+1}{X^4-1}$

Exercice 32. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F^2 = X$.

Exercice 33. Soit un entier $n \geq 1$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$.

Exercice 34. Soit $F = \dfrac{1}{(X+1)^3(X-1)^3}$. Étudier la parité de F puis obtenir sa décomposition en éléments simples.

En déduire des polynômes U et V tels que $(X-1)^3U + (X+1)^3V = 1$.

Exercice 35.

1) Déterminer la décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.

2) En déduire pour tout entier $n \geq 1$ la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 36. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 2\tan^2 x}dx$. On pourra utiliser le changement de variables $t = \sin x$.

Exercice 37. Calculer pour tout entier $n \geq 1$ la dérivée n-ième de $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{(x+1)^2(x-2)^2}$.

Exercice 38 ($\star$)**.** Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F = \dfrac{X}{X^4+X^2+1}$.

En déduire pour tout entier $n \geq 1$ la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+k^2+1}$.