TD 20 : Systèmes linéaires

Systèmes linéaires

Exercice 1.

Exercice 2.

Exercice 3.

Exercice 4.

Exercice 5.

Exercice 6. 1) En passant au logarithme, on obtient le système

$$\begin{cases} 3\ln x + 2\ln y + 6\ln z = 0 \\ 4\ln x + 5\ln y + 12\ln z = 1 \\ 2\ln x + 2\ln y + 5\ln z = 2 \end{cases}$$

(ce système est bien équivalent au système initial car on peut appliquer l'exponentielle à ce second système). On pose à présent $X = \ln x$, $Y = \ln y$ et $Z = \ln z$, de sorte qu'on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 3X + 2Y + 6Z = 0 \\ 4X + 5Y + 12Z = 1 \\ 2X + 2Y + 5Z = 2 \end{cases}$$

On résout alors ce système et on trouve comme unique solution le triplet $(X,Y,Z) = (10,21,-12)$. On en déduit que l'unique solution du système initial est :

$$(x,y,z) = (e^{10}, e^{21}, e^{-12})$$

2) On va utiliser la forme exponentielle. Tout d'abord, x, y, z sont forcément tous non nuls puisque $x^3y^2z^6 \neq 0$. Ainsi, ces complexes admettent tous une forme exponentielle. On peut donc poser :

$$x = r_1 e^{i\theta_1} \qquad y = r_2 e^{i\theta_2} \qquad z = r_3 e^{i\theta_3}$$

avec $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \left[0, 2\pi\right[$. Le système devient donc :

$$\begin{cases} r_1^3 r_2^2 r_3^6 e^{i(3\theta_1+2\theta_2+6\theta_3)} & = 1 \\ r_1^4 r_2^5 r_3^{12} e^{i(4\theta_1+5\theta_2+12\theta_3)} & = e \\ r_1^2 r_2^2 r_3^5 e^{i(2\theta_1+2\theta_2+5\theta_3)} & = e^2 \end{cases}$$

En égalisant les modules ainsi que les arguments modulo 2π, on trouve le système équivalent :

$$\begin{cases} r_1^3 r_2^2 r_3^6 & = 1 \\ r_1^4 r_2^5 r_3^{12} & = e \\ r_1^2 r_2^2 r_3^5 & = e^2 \\ 3\theta_1 + 2\theta_2 + 6\theta_3 & \equiv 0 \left[2\pi\right] \\ 4\theta_1 + 5\theta_2 + 12\theta_3 & \equiv 0 \left[2\pi\right] \\ 2\theta_1 + 2\theta_2 + 5\theta_3 & \equiv 0 \left[2\pi\right] \end{cases}$$

Par la question précédente, les trois premières lignes donnent $(r_1, r_2, r_3) = (e^{10}, e^{21}, e^{-12})$. Étudions le système formé par les trois dernières lignes, qu'on note $(\mathcal{S})$

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} 3\theta_1 + 2\theta_2 + 6\theta_3 & \equiv 0\ [2\pi] \\ 4\theta_1 + 5\theta_2 + 12\theta_3 & \equiv 0\ [2\pi] \\ 2\theta_1 + 2\theta_2 + 5\theta_3 & \equiv 0\ [2\pi] \end{cases}$$

Faisons l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ sur $(\mathcal{S})$. On obtient le système $(\mathcal{S}')$:

$$(\mathcal{S}') \qquad \begin{cases} \theta_1 + \theta_3 & \equiv 0\ [2\pi] \\ 4\theta_1 + 5\theta_2 + 12\theta_3 & \equiv 0\ [2\pi] \\ 2\theta_1 + 2\theta_2 + 5\theta_3 & \equiv 0\ [2\pi] \end{cases}$$

Il est clair que $(\mathcal{S}) \implies (\mathcal{S}')$. Mais on a aussi $(\mathcal{S}') \implies (\mathcal{S})$ en faisant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$. Les systèmes $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$ sont donc équivalents. De même, on peut montrer que toute transformation de transvection sur un système de congruences modulo 2π transforme un système en un autre qui lui est équivalent. On poursuit la résolution (on pourrait aussi le faire en suivant l'algorithme du pivot) :

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_3 & \equiv 0\ [2\pi] \\ \theta_2 + 2\theta_3 & \equiv 0\ [2\pi] \\ 2\theta_2 + 3\theta_3 & \equiv 0\ [2\pi] \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_3 & \equiv 0\ [2\pi] \\ \theta_2 + 2\theta_3 & \equiv 0\ [2\pi] \\ -\theta_3 & \equiv 0\ [2\pi] \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_3 & \equiv 0\ [2\pi] \\ \theta_1 + \theta_3 & \equiv 0\ [2\pi] \\ \theta_2 + 2\theta_3 & \equiv 0\ [2\pi] \end{cases}$$

Puisque $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, 2\pi[$, on en déduit :

$$\begin{cases} \theta_3 & = 0 \\ \theta_1 & \equiv 0\ [2\pi] \\ \theta_2 & \equiv 0\ [2\pi] \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_3 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \end{cases}$$

(on pouvait aussi substituer θ_3 par 0 dans les congruences). Finalement, $x = r_1$, $y = r_2$ et $z = r_3$ donc

$$\mathcal{S} = \left\{ (e^{10}, e^{21}, e^{-12}) \right\}$$

Calcul effectif de l'inverse

Exercice 7.

Exercice 8 (*Classique !*)**.**