TD 20 : Systèmes linéaires

Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+iy+(1+i)z=0 \\ x-y+4iz=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+z-t=2 \\ 3x-3y+2z=5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 3x-y-2z=0 \\ x+y-z=-2 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$

Exercice 2. Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ telles que le système suivant soit compatible : $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+4y-3z=-2 \\ -x-3y+4z=m \end{cases}$

Exercice 3. Résoudre $\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{cases}$ puis $\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+t=0 \\ t+x=0 \end{cases}$ Étonnant, non ?

Exercice 4. Déterminer tous les polynômes P de degré au plus 3 tels que $P(0)=-2$, $P(1)=2$, $P(2)=3$ et $P(3)=0$.

Exercice 5. Montrer qu'il existe un unique triplet $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout polynôme P de degré au plus 2 :

$$\int_1^3 P(t)dt = \alpha P(1) + \beta P(2) + \gamma P(3)$$

Exercice 6. Résoudre le système $\begin{cases} x^3y^2z^6 & = 1 \\ x^4y^5z^{12} & = e \\ x^2y^2z^5 & = e^2 \end{cases}$:

1) ... dans le cas où x,y,z sont des réels strictement positifs.
2) $(\star)$... dans le cas où x,y,z sont des complexes.

Calcul effectif de l'inverse

Exercice 7. Déterminer si les matrices ci-dessous sont inversibles et, lorsque c'est le cas, calculer leur inverse

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad F_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } m \in \mathbb{R}$$

Pour F_m, on donnera uniquement les valeurs de m pour lesquelles la matrice F_m est inversible, sans calculer son inverse.

Exercice 8 (*Classique !*)**.** On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2) Vérifier que la matrice $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on calculera.
3) Exprimer A en fonction de D et de P.
4) En déduire A^k avec $k \in \mathbb{N}^*$.