TD 18 : Structures algébriques

Calcul dans un groupe

Exercice 1 (Calcul dans un groupe)**.** Soit $(G,\cdot)$ un groupe. Développer et simplifier les expressions suivantes, ou résoudre les équations suivantes, avec $a,b,c,d,x \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$:

1) $(axa^{-1})^{-1}$
2) $(abcd)^{-1}$
3) $(axa^{-1})^{n}$
4) $axa^{-1} = b$
5) $a^n x b^n = c$
6) $a^{-1}x^{-1} = b^{-1}$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(n\mathbb{Z},+)$ est un groupe.

Exercice 3. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Montrer que si $1 \in H$, alors $H = \mathbb{Z}$.

Exercice 4. On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $*$ par $a * b = a + b - ab$.

1) Montrer que $*$ est une l.c.i. associative sur $\mathbb{R}$. Trouver son élément neutre.
2) Est-ce que $(\mathbb{R},*)$ est un groupe ?
3) Déterminer $z \in \mathbb{R}$ tel que $(\mathbb{R}\setminus\{z\},*)$ soit un groupe.

Exercice 5. Soit E un ensemble muni d'une l.c.i. notée $\cdot$. On dit que $a \in E$ est <u>absorbant</u> si : $\quad \forall x \in E \quad ax = xa = a$.

1) Montrer que s'il existe un élément absorbant de E, celui-ci est unique.
2) Déterminer l'élément absorbant de $(\mathbb{R},\times)$.
3) Soit X un ensemble. Déterminer l'élément absorbant de $(\mathscr{P}(X),\cup)$ et de $(\mathscr{P}(X),\cap)$.
4) On suppose que E admet un élément neutre e et un élément absorbant a. Montrer que $e = a$, puis $E = \{e\}$.

Exercice 6. Soit $(G,\cdot)$ un groupe et H,K deux sous-groupes de G.

1) Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.
2) Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 7. Soit $(G,\cdot)$ un groupe. On définit le <u>centre</u> de G comme l'ensemble des éléments $a \in G$ qui commutent avec tous les éléments de G, c'est-à-dire :

$$Z(G) := \{a \in G \mid \forall x \in G \quad ax = xa\}$$

Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G. Si G est commutatif, que vaut son centre $Z(G)$?

Exercice 8. On pose T l'ensemble des translations de $\mathbb{C}$ et S l'ensemble des similitudes de $\mathbb{C}$:

$$T = \{t_a \mid a \in \mathbb{C}\} \qquad \text{avec} \qquad t_a : z \mapsto z + a$$

$$S = \left\{\sigma_{a,b} \mid (a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\right\} \qquad \text{avec} \qquad \sigma_{a,b} : z \mapsto az + b$$

Montrer que T et S sont des sous-groupes de $(\mathrm{Bij}(\mathbb{C}),\circ)$, où $\mathrm{Bij}(\mathbb{C})$ est l'ensemble des bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On déterminera d'abord les symétriques de t_a et $\sigma_{a,b}$ pour $\circ$.

Exercice 9 ($\star$)**.** On a vu dans un exercice précédent que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$. Réciproquement, si H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$, montrer que H est de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$ à déterminer.

Indication : Lorsque $H \neq \{0\}$, on pourra commencer par montrer que $H \cap \mathbb{N}^*$ admet un minimum.

Morphismes de groupes

Exercice 10. Soit $(G,\cdot)$ un groupe d'élément neutre e, et soit $a \in G$. On pose

$$f_a : \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto ax \end{array} \qquad g_a : \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto axa^{-1} \end{array} \qquad h_a : \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto xax \end{array}$$

Déterminer, en fonction de a, si f_a, g_a et h_a sont des morphismes, des endomorphismes, des isomorphismes, des automorphismes.

Exercice 11. On pose $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et on définit

$$* : \begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ (r_1,\theta_1),(r_2,\theta_2) & \mapsto & (r_1r_2, \theta_1+\theta_2) \end{array}$$

Justifier que $(E,*)$ est un groupe. On pose

$$\varphi : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{C}^* \\ (r,\theta) & \mapsto & re^{i\theta} \end{array}$$

Montrer que φ est un morphisme de $(E,*)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$. Déterminer son image et son noyau.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On pose

$$\varphi_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C}^* \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

1) Montrer que φ_n est un endomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$. Est-ce un automorphisme ?
2) En déduire que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

Calcul dans un anneau

Exercice 13. Soit $(A,+,\times)$ un anneau. Un élément $x \in A$ est dit <u>nilpotent</u> lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0_A$.

1) Soit $x,y \in A$. Montrer que si x est nilpotent et x,y commutent, alors xy est nilpotent.
2) Soit $x,y \in A$. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors $x+y$ est nilpotent.
3) Soit $x \in A$ nilpotent. Montrer que $1-x$ est inversible et calculer $(1-x)^{-1}$, où 1 désigne 1_A.

Exercice 14. Soit $(G,+)$ un groupe abélien. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G. On définit sur $\mathrm{End}(G)$ les lois $+$ et $\circ$ usuelles : $\quad f+g : x \mapsto f(x)+g(x) \quad$ et $\quad g\circ f : x \mapsto g(f(x))$.

1) Montrer que $(\mathrm{End}(G),+,\circ)$ est un anneau.
2) On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G. Montrer que $(\mathrm{Aut}(G),\circ)$ est un groupe.

Exercice 15. On note $A = \left\{ m + n\sqrt{6} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

1) Montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau.
2) On pose $\varphi : A \to A$ définie pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$ par $\varphi(m + n\sqrt{6}) = m - n\sqrt{6}$. Montrer que φ est un automorphisme de l'anneau A.
3) On pose $N : A \to \mathbb{Z}$ définie pour tout $x \in A$ par $N(x) = x\varphi(x)$. Montrer que pour tous $x, y \in A$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
4) Soit $x \in A$. Montrer que x est inversible si et seulement si $N(x) = \pm 1$.
5) Vérifier que $5 + 2\sqrt{6}$ est inversible (dans A) et calculer son inverse.

Exercice 16 (Entiers de Gauss)**.** On définit l'ensemble des entiers de Gauss par :

$$\mathbb{Z}\left[i\right] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

1) Montrer que $\mathbb{Z}\left[i\right]$ muni des lois $+$ et $\times$ usuelles est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2) Soit $a + bi$ un entier de Gauss inversible. Montrer que $a^2 + b^2 = 1$.
3) En déduire les éléments inversibles de $\mathbb{Z}\left[i\right]$.
4) Un entier de Gauss x est dit irréductible si, pour tous $y, z \in \mathbb{Z}\left[i\right]$,

$$x = yz \implies \left(y \in \mathbb{Z}\left[i\right]^\times \text{ ou } z \in \mathbb{Z}\left[i\right]^\times \right)$$

   L'entier 2 est-il irréductible ?

Exercice 17 $(\star)$**.** Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que $\quad \forall x \in A \quad x^2 = x$.

Montrer que pour tout $x \in A$, on a $-x = x$. En déduire que A est commutatif.

Anneaux intègres, corps

Exercice 18. Soit X un ensemble. On définit sur $\mathscr{P}(X)$ la loi de différence symétrique notée Δ par :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

1) Montrer que $(\mathscr{P}(X), \Delta, \cap)$ est un anneau (on pourra admettre l'associativité de Δ...).
2) Cet anneau est-il intègre ? Quels sont les éléments inversibles ?

Exercice 19. Soit $\mathbb{K}$ l'ensemble des complexes sous la forme $p + iq$ avec $p, q \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\mathbb{K}$ est un corps.

Exercice 20. Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre fini (i.e. de cardinal fini) et non trivial. Soit $a \in A \setminus \{0_A\}$.

1) Montrer que l'application f_a définie ci-dessous est injective :

$$\begin{aligned} f_a : A &\to A \\ x &\mapsto ax \end{aligned}$$

2) Montrer que $f_a(A) = A$ (on pourra raisonner sur le cardinal). En déduire que f_a est bijective.
3) En déduire que a est inversible.
4) Montrer que A est un corps.