

TD 17 : Indications

Divisibilité, division euclidienne

Exercice 1. Raisonner par analyse-synthèse et utiliser la propriété $\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \implies \forall u, v \in \mathbb{Z} \quad d \mid au + bv$ avec u, v bien choisis.

Exercice 2.

Exercice 3. Raisonner par analyse-synthèse et faire apparaître des produits pour en déduire des conditions nécessaires de divisibilité.

Exercice 4.

Exercice 5.

Exercice 6. De quelle caractérisation dispose-t-on sur $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$? Montrer que q la vérifie.

Exercice 7 (*). Après simplification par $n!$, on remarque que :

$$40^n n! \mid (5n)! \iff 40^n \mid \dots$$

il faut utiliser cette information dans la récurrence.

PGCD, PPCM

Exercice 8.

Exercice 9.

Exercice 10.

Exercice 11.

Exercice 12. Pour la seconde, on pourra disjoindre les cas selon que $n - 1$ soit divisible par 3 ou non.

Exercice 13. À chaque fois, il faut se ramener à des entiers premiers entre eux : poser $d = x \wedge y$, et

$$x' = \frac{x}{d} \quad y' = \frac{y}{d}$$

de sorte que x' et y' soient premiers entre eux. Il faut ensuite réécrire chaque système en fonction de x' et de y' .

Nombres premiers, valuations

Exercice 14 (*Calcul de PGCD et de PPCM*). Pour le 4, on peut aussi changer l'ordre des entiers et calculer les PPCM séparément.

Exercice 15. Des exemples du cours permettent de faire cet exercice.

Exercice 16.

Exercice 17. Le nombre de 0 correspond au plus grand entier k tel que $10^k \mid 100!$. Si la décomposition de $100!$ en produits de facteurs premiers est $100! = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \times \dots$ alors que vaut k en fonction de α et de γ ?

Exercice 18.

Exercice 19.

Exercice 20.

Exercice 21 (*). Il suffit de montrer que 8 divise $p^2 - 1$ et 3 divise $p^2 - 1$. On pourra utiliser le fait que $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.

Exercice 22 (**).

Congruences

Exercice 23.

Exercice 24.

Exercice 25.

Exercice 26.

Exercice 27.

Exercice 28.

Exercice 29 (*Critères de divisibilité*).

Exercice 30 (*Équations de congruences*).

Exercice 31 (*Exercice banque CCP*).

Équations diophantiennes

Exercice 32.

Exercice 33.