TD 17 : Arithmétique

Divisibilité, division euclidienne

Exercice 1. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que :

1) $n-1$ divise $n+2$ 2) $n-4$ divise $3n-17$ 3) $n+1$ divise $2n^2-2n+4$

Exercice 2. Montrer que la somme de 5 entiers consécutifs est divisible par 5.
Est-ce que la somme de 4 entiers consécutifs est divisible par 4 ?

Exercice 3. Pour chaque équation, trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions :

1) $3x^2 + xy = 11$
2) $x^2 - y^2 = 5$.
3) $xy = x + 2y$
4) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $1+2+\ldots+n$ par n.

Exercice 5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad n^2 \mid (n+1)^n - 1$

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b > 0$. On note q le quotient de la division euclidienne de a par b. Montrer que $q = \left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor$.

Exercice 7 ($\star$)**.** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $40^n \times n!$ divise $(5n)!$

PGCD, PPCM

Exercice 8. Déterminer tous les entiers qui divisent à la fois 318 et 282.

Exercice 9. Calculer les PGCD des couples (a, b) suivants, ainsi que des coefficients de Bézout :

1. $(a,b) = (69, 13)$ 2. $(a,b) = (270, 105)$

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les fractions $\dfrac{14n+3}{21n+4}$, $\dfrac{n^2+n}{2n+1}$, et $\dfrac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$ sont irréductibles.

Exercice 11. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. L'objectif est de montrer que $a \wedge b = 1 \iff (a+b) \wedge (ab) = 1$

1) Montrer le sens réciproque.
2) On suppose $a \wedge b = 1$. Montrer que $(a+b) \wedge a = 1$. En déduire que $(a+b) \wedge (ab) = 1$.

Exercice 12. Soit $n \geq 2$ un entier. Calculer :

1) $n \vee (2n+1)$
2) $(n-1) \vee (2n+1)$

Exercice 13. Résoudre **A)** $\begin{cases} x \wedge y = 15 \\ xy = 900 \end{cases}$ dans $\mathbb{N}^2$ **B)** $\begin{cases} x \wedge y = 5 \\ x \vee y = 60 \end{cases}$ dans $\mathbb{N}^2$ **C)** $\begin{cases} x \wedge y = 10 \\ x + y = 100 \end{cases}$ dans $\mathbb{N}^2$

Nombres premiers, valuations

Exercice 14 (*Calcul de PGCD et de PPCM*)**.** En utilisant (entre autres) la décomposition en produits de facteurs premiers, calculer :

1) $105 \wedge 147$ puis $105 \vee 147$

2) $90 \vee 120$

3) $60 \wedge 144 \wedge 84$

4) $1 \vee 2 \vee 3 \vee 4 \vee 5 \vee 6 \vee 7 \vee 8 \vee 9 \vee 10$

Exercice 15. 1) Décomposer 360 et 1750 en produit de facteurs premiers.

2) Quel est le nombre de diviseurs positifs de 360 ? de 1750 ? qui sont communs à 360 et 1750 ?

Exercice 16. Montrer que $\sqrt{2}$, $\dfrac{\ln 8}{\ln 7}$ et $\sqrt[5]{\dfrac{3}{4}}$ sont irrationnels.

Exercice 17. Parmi les nombres de 1 à 100, combien sont divisibles par 5 ? par 25 ? En déduire le nombre de 0 apparaissant à la fin de l'écriture décimale du nombre 100!

Exercice 18. Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant les valuations, démontrer que $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$.

Exercice 19. Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier.

1) Montrer que $v_p(a+b) \geq \min(v_p(a), v_p(b))$.

2) Trouver a, b et p tels que $v_p(a+b) > \min(v_p(a), v_p(b))$.

3) Montrer que si $v_p(a) \neq v_p(b)$, on a $v_p(a+b) = \min(v_p(a), v_p(b))$.

Exercice 20. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer qu'il n'existe aucun nombre premier entre $n! + 2$ et $n! + n$.

Exercice 21 ($\star$)**.** Soit $p \geq 5$ un nombre premier. Montrer que 24 divise $p^2 - 1$.

Exercice 22 ($\star\star$)**.** Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par N le nombre de diviseurs positifs de n et par P leur produit. Trouver une relation simple reliant n, N et p.

On pourra utiliser l'écriture $n = \prod_{i=1}^{r} p_i$ avec $p_1, \cdots, p_r$ des nombres premiers (non nécessairement distincts).

Congruences

Exercice 23. Déterminer le reste de la division euclidienne de :

1) 7^{77} par 10

2) 5^{2025} par 11

3) 3^{80} par 17

4) 9^{10} par 12

5) 8^{88} par 6

6) 2^{40} par 10

Exercice 24. Déterminer le dernier chiffre de 13^{13}.

Exercice 25. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad 7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

Avec un tableau de congruence, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\quad 6 \mid 5n^3 + n$.

Exercice 26. 1) Montrer que si n est un entier impair, alors $n^2 \equiv 1 \; [8]$.

2) Montrer que si m est un entier pair, alors $m^2 \equiv 0 \; [8]$ ou $m^2 \equiv 4 \; [8]$.

3) En déduire que si a, b, c sont trois entiers impairs, alors $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 27. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de $6^n - 1$ par 7 appartient à $\{0, 5\}$.

Exercice 28. 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\quad n^{21} \equiv n \left[N\right] \quad$ avec $N = 2$ puis $N = 3$ puis $N = 5$ puis $N = 11$.

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 330 divise $n^{21} - n$.

Exercice 29 (*Critères de divisibilité*)**.** Soit $a \in \mathbb{N}$ un entier à N chiffres. Soit $a_{N-1}a_{N-2}\cdots a_0$ son écriture en base 10. On a donc

$$a = 10^{N-1}a_{N-1} + 10^{N-2}a_{N-2} + \ldots + 10a_1 + a_0$$

1) Montrer que $5 \mid a$ ssi $5 \mid a_0$ (les critères pour $2 \mid a$ et $3 \mid a$ se montrent de même).
2) Montrer que $9 \mid a$ ssi $9 \mid a_{N-1} + \ldots + a_0$
3) On appelle somme alternée des chiffres de a le nombre

$$S(a) = a_{N-1} - a_{N-2} + \ldots + (-1)^{N-1}a_0$$

   (a) Montrer que $11 \mid a$ ssi $11 \mid S(a)$.
   (b) En déduire les entiers $k \in [\![0, 9]\!]$ tels que $4230 + k$ est divisible par 11.

4) On note q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 10.
   (a) Montrer que n est un multiple de 7 si et seulement si $q - 2r$ est multiple de 7.
   (b) En réitérant, on a donc un critère de divisibilité par 7. L'appliquer aux entiers 84, 173, 343, 526 et 1001.

Exercice 30 (*Équations de congruences*)**.** Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

1) $6x \equiv 9 \left[15\right]$
2) $10x \equiv 5 \quad \left[34\right]$
3) $10x \equiv 6 \quad \left[34\right]$
4) $7x \equiv 11 \left[31\right]$

Exercice 31 (***Exercice banque CCP***)**.** On cherche à résoudre le système suivant, d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$:

$$(S) : \quad \begin{cases} x \equiv 6 & \left[17\right] \\ x \equiv 5 & \left[16\right] \\ x \equiv 4 & \left[15\right] \end{cases}$$

1) Déterminer une solution particulière $x_0 \in \mathbb{Z}$.
2) En déduire les solutions de (S).

Équations diophantiennes

Exercice 32. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

$(E_1) : \quad 7x + 12y = 5$ $\qquad (E_2) : \quad 9x + 15y = 11$ $\qquad (E_3) : \quad 9x + 15y = 18$

$(E_4) : \quad 16x - 3y = 4$ $\qquad (E_5) : \quad 18x + 7y = 12$ $\qquad (E_6) : \quad 3x + 7y = 10^n \quad (n \in \mathbb{N})$

Exercice 33. Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Par la relation de Bézout, il existe $u_0, v_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $au_0 + bv_0 = a \wedge b$. Mais, quels sont TOUS les couples (u, v) tels que $au + bv = a \wedge b$? On les exprimera en fonction de a, b, u_0, v_0.