TD 14-15 : Indications

Les grands théorèmes de la dérivation

Exercice 1. Une telle égalité avec $x < \alpha_x < x+1$ fait penser au théorème des accroissements finis.

Exercice 2. Remarquer que $(f-g)(a) = 0$ et $(f-g)(b) = 0$.

Exercice 3. Un théorème permet de conclure que si f s'annule en certains points, f' s'annule sur d'autres...

Exercice 4. Majorer l'erreur de l'approximation $a \approx b$ revient à majorer la distance entre a et b, c'est-à-dire $|a-b|$.

Exercice 5. Prolonger la fonction g par continuité en $\pm\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 6. 1) Isoler A dans l'équation $g(a) = 0$ ou $g(b) = 0$, lorsque c'est nécessaire.
2) Immédiat mais soyez consciencieux malgré tout.
3) En utilisant le fait que $g(b) = 0$, que doit valoir A pour que cela fonctionne ? Puis utiliser la question 2.

Dérivabilité revisitée

Exercice 7. Repartir de la définition avec le taux d'accroissement.

Exercice 8. 1) C'est un taux d'accroissement.
2) Considérer d'abord $\mathbb{R}_+^*$ (qui est ouvert), puis traiter le cas 0 par un théorème.
3) Appliquer la même méthode qu'en 2.

Exercice 9. Étudier d'abord la dérivabilité sur $\left]-1,1\right[$, puis en 1 et en -1 qui sont des points "potentiellement problématiques".

Exercice 10. On peut utiliser le théorème de la limite de la dérivée, ou bien la dérivabilité à gauche / à droite. Cette dernière méthode est parfois plus rapide lorsqu'on veut montrer qu'il n'y a pas dérivabilité en 0.

Exercice 11. Montrer que la fonction f est discontinue en tout point $a \neq 0$. Elle ne sera donc pas dérivable en a.
Il reste la dérivabilité en 0.

Dérivées n-ièmes

Exercice 12 (Dérivées n-ièmes)**.** S'appuyer sur la méthode en dernière page du poly de cours.

Exercice 13. 1) Une façon est de dériver n fois $x \mapsto x^{2n}$ directement. Une autre est d'appliquer la formule de Leibniz car $f = gh$ avec $g(x) = x^n$ et $h(x) = x^n$.

2) En égalisant les expressions trouvées en question 1, le résultat arrive rapidement.

Exercice 14. 1) C'est immédiat par la phrase magique.

2) Il faut procéder par récurrence. Il n'est pas nécessaire d'avoir une expression explicite de P_n.

3) C'est un prolongement en un “trou” : calculer la limite à gauche puis à droite.

Exercice 15. Remarquer que chaque fonction est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Il suffit donc de regarder ce qui se passe en 0.

Exercice 16 ($\star$)**.** Supposons par l'absurde qu'il y a une infinité de réels x qui vérifient $P(x) = e^x$. Donc la fonction $f : x \mapsto P(x) - e^x$ prend la valeur zéro en une infinité de points. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe (au moins) n points où f s'annule.

Convexité

Exercice 17. Utiliser la définition.

Exercice 18 (Inégalités de convexité)**.** Des inégalités qui font intervenir n points $x_1, \cdots, x_n$? Il faut utiliser Jensen ! Écrivez d'abord l'inégalité de Jensen pour la fonction en question (à vous de la trouver pour la question 3), puis faites des réécritures.

Exercice 19. Remarquer que ce sont des inégalités qui font intervenir des fonctions affines. Faire le lien avec la méthode du cours.

Exercice 20.

Exercice 21. Raisonner par l'absurde en supposant f non constante. Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f(a) \neq f(b)$. Utiliser ensuite une propriété que vérifie une fonction convexe...