TD 13 : Corrigé

Limites

Exercice 1 (*Calcul de limites*).

Exercice 2 (*Limites par la dérivée*).

Exercice 3.

Exercice 4.

Exercice 5 (⋆⋆). Comme $f(x+1)-f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on a par définition :

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad x \geq A \implies f(x+1)-f(x) \leq \varepsilon'$$

(on peut enlever les valeurs absolues car f est croissante). On veut montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad x \geq B \implies \frac{f(x)}{x} \leq \varepsilon$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ et (en prenant $\varepsilon' = \varepsilon$) $A \in \mathbb{R}$ le réel tel que $\forall x \geq A \quad f(x+1)-f(x) \leq \varepsilon$. On a en particulier, avec $x = A$

$$f(A+1) \leq \varepsilon + f(A)$$

puis avec $x = A+1$

$$f(A+2) \leq \varepsilon + f(A+1)$$

et par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(A+n) \leq n\varepsilon + f(A)$$

Plus généralement, pour tout $x \geq A$, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $A+(n-1) < x \leq A+n$, et par croissance de f, on a :

$$f(x) \leq f(A+n) \leq n\varepsilon + f(A)$$

Alors (en supposant $x > 0$)

$$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{n\varepsilon + f(A)}{x} \leq \frac{(x-A+1)\varepsilon + f(A)}{x}$$

Or, $\dfrac{(x-A+1)\varepsilon + f(A)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \varepsilon$. Ainsi, par définition de la limite, il existe $B \geq A$ avec $B > 0$ (pour assurer que $x > 0$) tel que pour tout $x \geq B$

$$\frac{(x-A+1)\varepsilon + f(A)}{x} \leq 2\varepsilon$$

Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq B$, on a

$$\left|\frac{f(x)}{x} - 0\right| \leq 2\varepsilon$$

Ce qui revient à avoir $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Note : pour coller complètement à la définition, il faudrait avoir ε et non 2ε et on aurait dû donc prendre $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$ dans notre preuve. Cependant, il est inutile de tout refaire ou de corriger car dans les faits,

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in \mathbb{R} \quad \forall x \geq B \qquad |g(x) - \ell| \leq 2\varepsilon \\ \iff &\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists B' \in \mathbb{R} \quad \forall x \geq B' \qquad |g(x) - \ell| \leq \varepsilon' \end{aligned}$$

En effet :

- partant de la seconde assertion, on obtient la première en prenant $\varepsilon' = \varepsilon$ dans la seconde assertion : on a alors pour x assez grand, $|g(x) - \ell| \leq \varepsilon$ donc $|g(x) - \ell| \leq 2\varepsilon$
- partant de la première assertion, on obtient la seconde en prenant $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}$ dans la première assertion : on a alors pour x assez grand, $|g(x) - \ell| \leq 2\varepsilon = \varepsilon'$.

Moralité : on n'est pas toujours obligé de couper les ε en 4 ! Notamment lorsqu'on doit montrer une assertion qui commence par "$\forall \varepsilon > 0$".

Continuité

Exercice 6.

Exercice 7.

Exercice 8.

Exercice 9.

Exercice 10.

Exercice 11 ($\star$)**.**

Exercice 12 ($\star\star$)**.**

Théorèmes sur la continuité

Exercice 13 (Un classique !)**.**

Exercice 14.

Exercice 15.

Exercice 16.

Exercice 17.

Exercice 18.

Exercice 19.

Exercice 20 ($\star$)**.**

Exercice 21.