TD 13 : Indications

Limites

Exercice 1 (*Calcul de limites*)**.**

Exercice 2 (*Limites par la dérivée*)**.**

Exercice 3.

Exercice 4. Supposer par l'absurde que f n'est pas constante. Il existe donc $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Puis, remarquer que $f(a) = f(a+T) = f(a+2T) = \dots$

Exercice 5 ($\star\star$)**.** Comme $f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, on a par définition :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad x \geq A \implies f(x+1) - f(x) \leq \varepsilon$$

Il faut ensuite utiliser cette définition pour obtenir une majoration de $\dfrac{f(x)}{x}$ par une expression $g(x)$ qui tend vers ε quand x tend vers $+\infty$.

Continuité

Exercice 6.

Exercice 7.

Exercice 8. Passer à la forme exponentielle et calculer la limite de ce qui se trouve dans l'exponentielle dans un premier temps.

Exercice 9. Utiliser le fait que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10.

Exercice 11 ($\star$)**.** Supposer par l'absurde que f n'est pas constante : il existe alors $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Remarquer ensuite que $f(a) = f\left(\dfrac{a}{2}\right) = f\left(\dfrac{a}{4}\right) = \dots$

Exercice 12 ($\star\star$)**.** Pour la discontinuité en $a \in \mathbb{Q}$, utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité de f en a et une suite bien choisie.

Pour la continuité en $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, partir de la définition. Pour tout $\varepsilon > 0$, il faudra notamment trouver un $\delta > 0$ tel que $|x-a| \leq \delta$ entraine ou bien $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ou bien $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $|\dfrac{1}{q}| \leq \varepsilon$. Pour trouver ce δ, considérer l'ensemble

$$X_\varepsilon = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*, |q| < \frac{1}{\varepsilon} \right\}$$

et montrer que l'ensemble des distances entre a et les points de X_ε, à savoir :

$$\{|a-x| \mid x \in X_\varepsilon\}$$

admet un minimum strictement positif. Le δ à poser s'en déduit...

Exercice 13 (Un classique !)**.**

Exercice 14.

Exercice 15. Pour $f \circ g$, c'est évident.

Pour $g \circ f$, montrer que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle borné. Un théorème sur g permet ensuite de conclure, en faisant attention au fait que $f(\mathbb{R})$ n'est pas forcément un intervalle fermé.

Exercice 16. Considérer la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et montrer qu'elle s'annule en au moins un point.

Exercice 17. Considérer la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et montrer qu'elle s'annule en au moins un point.

Exercice 18. Pour chaque cas, essayer de dessiner une telle fonction. Si ça marche, tant mieux ! Il ne reste plus qu'à trouver une fonction qui correspond à cela.

Si cela ne marche pas, raisonner par l'absurde.

Exercice 19. En utilisant les limites en $\pm\infty$, il faut montrer (en rédigeant convenablement) que f ne peut atteindre son minimum que sur un intervalle fermé borné, par exemple de la forme $\left[-A, A\right]$.

Exercice 20 ($\star$)**.** Si on note $D(t)$ la distance parcourue par le cycliste entre les instants t et $t+30$ (en minutes), alors on peut reformuler le problème ainsi : on pose la fonction

$$\begin{aligned} f : \left[0, 30\right] &\to \mathbb{R}_+ \\ T &\mapsto D(t) - 10 \end{aligned}$$

Le problème revient à montrer que f admette (au moins) un zéro, sachant que $D(0) + D(30) = 20$...

Exercice 21.