TD 11-12 : Corrigé

Bornes supérieures et inférieures

Exercice 1 (*Bornes sup et inf, pratique*)**.**

Exercice 2 (*Bornes sup et inf, théorique*)**.**

Exercice 3.

Nombres rationnels, densité

Exercice 4 (*Nombres rationnels*)**.**

Exercice 5 (*Densité*)**.**

Convergence de suites

Exercice 6 (*Sens de variation*)**.**

Exercice 7.

Exercice 8 (*Limite de suites*)**.**

Exercice 9 (*Série harmonique*)**.**

Exercice 10 (***Moyenne de Césaro***)**.** 1) Comme $u_n \to 0$, on a

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq N_1 \qquad |u_k| \leq \varepsilon_1$$

Or, on veut montrer que $v_n \to 0$, i.e. :

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \qquad |v_n| \leq \varepsilon_2$$

Soit donc $\varepsilon_2 > 0$.
Recherche au brouillon. On veut $|v_n| \leq \varepsilon_2$. Or, l'indication nous dit que pour tous $n \geq N$ (avec un N qu'on peut choisir) :

$$|v_n| \leq \left|\frac{u_1 + \cdots + u_{N-1}}{n}\right| + \left|\frac{u_N + \cdots + u_n}{n}\right|$$

Pour conclure, il suffit que chaque terme du membre de droite soit $\leq \frac{1}{2}\varepsilon_2$. Commençons par $\left|\frac{u_N + \cdots + u_n}{n}\right|$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{u_N + \cdots + u_n}{n}\right| &\leq \frac{1}{n}\left(|u_N| + \ldots + |u_n|\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} |u_k| \qquad \underset{?}{\leq} \frac{1}{2}\varepsilon_2\end{aligned}$$

Or, si on prend $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{2}\varepsilon_2$, on sait qu'il existe N_1 tel que pour tout $k \geq N_1$, chaque $|u_k|$ sera plus petit que $\dfrac{1}{2}\varepsilon_2$.
De plus, de N à n, il y a $n-N+1$ termes, mais on divise par n : la somme restera $\leq \dfrac{1}{2}\varepsilon_2$ à condition que $N \geq 1$.
Il faut donc deux conditions : $N \geq 1$ et $N \geq N_1$. On peut prendre $N = \max(1, N_1)$.
Reste l'autre somme : comme (u_n) tend vers 0, elle est majorée par un $M \in \mathbb{R}$. On en déduit que :

$$\left|\frac{u_1 + \cdots + u_{N-1}}{n}\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|u_k| \leq \frac{N-1}{n}M$$

Il suffit donc de prendre n assez grand pour que le terme de droite soit $\leq \dfrac{1}{2}\varepsilon_2$: or,

$$\frac{N-1}{n}M \leq \frac{1}{2}\varepsilon_2 \iff n \geq \frac{2(N-1)}{\varepsilon_2}M$$

Donc il suffit que n soit plus grand que l'entier $\left\lfloor \dfrac{2(N-1)}{\varepsilon_2}M \right\rfloor + 1$ pour assurer que cette somme est $\leq \dfrac{1}{2}\varepsilon_2$.

Fin du brouillon. (On rappelle qu'on a écrit "Soit $\varepsilon_2 > 0$"). Comme (u_n) converge, elle est majorée : on note $M \in \mathbb{R}$ un majorant de (u_n). On pose $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{2}\varepsilon_2 > 0$. Comme $u_n \to 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N_1$ on a $|u_k| \leq \varepsilon_1$. On pose ensuite

$$N = \max(1, N_1) \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad N_2 = \max\left(N,\ \left\lfloor \frac{2(N-1)}{\varepsilon_2}M \right\rfloor + 1\right) \in \mathbb{N}$$

Alors, pour tout $n \geq N_2$ (comme $N_2 \geq N$) :

$$\begin{aligned}
|v_n| &\leq \left|\frac{u_1 + \cdots + u_{N-1}}{n}\right| + \left|\frac{u_N + \cdots + u_n}{n}\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|u_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}|u_k| \\
&\leq \frac{1}{n}(N-1)M + \frac{n-N+1}{n}\varepsilon_1 \qquad \text{car pour tout } k \geq N \text{ on a } k \geq N_1 \text{ donc } |u_k| \leq \varepsilon_1
\end{aligned}$$

Or, d'une part,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|u_k| \leq \frac{1}{n}(N-1)M \leq \frac{1}{2}\varepsilon_2 \qquad \text{car } n \geq N_2 \geq \frac{2(N-1)M}{\varepsilon_2}$$

et d'autre part, pour tout $k \geq N$ on a $k \geq N_1$ donc $|u_k| \leq \varepsilon_1$, si bien que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}|u_k| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\varepsilon_1 \\
&= \frac{n-N+1}{n}\varepsilon_1 \\
&\leq 1 \times \varepsilon_1 \qquad \text{car } N \geq 1 \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_2
\end{aligned}$$

On en déduit que $|v_n| \leq \dfrac{1}{2}\varepsilon_2 + \dfrac{1}{2}\varepsilon_2 = \varepsilon_2$. Ainsi, $v_n \to 0$.

Exercice 11.

Exercice 12.

Exercice 13 (*Suites définies implicitement*)**.**

Exercice 14 ($\star$)**.**

Exercice 15 ($\star$)**.**

Exercice 16 ($\star\star$)**.** Soit $n \geq 2$ un entier.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{k!(n-k)!}{n!} &= 1+1+\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1} k!(n-k)! \\ &= 2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n!}\sum_{k=2}^{n-2} k!(n-k)!\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1}-2\right| &\leq \frac{2}{n}+\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\binom{n}{k}} \\ &\leq \frac{2}{n}+\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &\leq \frac{2}{n}+\frac{2}{n(n-1)}\times(n-2-2+1) \\ &= \frac{2}{n}+\frac{2}{n(n-1)}\times(n-3) \\ &\leq \frac{2}{n}+\frac{2}{n}\to 0\end{aligned}$$

Donc la limite recherchée est 2.

Suites extraites, adjacentes, etc.

Exercice 17.

Exercice 18.

Exercice 19.

Exercice 20.

Exercice 21.

Exercice 22 ($\star$)**.**

Exercice 23 (Suite complexe)**.**

Exercice 24.

Suites récurrentes

Exercice 25.

Exercice 26 (*Suites récurrentes doubles*)**.**

Exercice 27.

Exercice 28 (Suites récurrentes, cas général)**.**

Exercice 29 ($\star$)**.**