TD 6 : Corrigé

Images directes, images réciproques, etc.

Exercice 1.

Exercice 2.

Exercice 3.

Exercice 4.

Exercice 5. Pour le 4. :

$$\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_{A\cap\overline{B}} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_{\overline{B}} = \mathbb{1}_A \times (1-\mathbb{1}_B)$$

Exercice 6.

Exercice 7.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Exercice 8. (Uniquement pour f_7)

Montrons que l'application f_7 est bijective. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

(On va montrer qu'il existe un unique $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y)=(a,b)$ en résolvant cette équation d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$)

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(x,y)=(a,b) &\iff \begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x+y=a \\ 2x=a+b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=\dfrac{a+b}{2} \\ y=a-x=\dfrac{a-b}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, l'unique solution de cette équation est $(x,y)=\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{a-b}{2}\right)$. On en déduit que f_7 est bijective.

Exercice 9.

Exercice 10.

Exercice 11. Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{2x+1}{x-3} \\ &\iff yx - 3y = 2x + 1 \\ &\iff (y-2)x = 3y+1 \end{aligned}$$

- Si $y = 2$, alors l'équation devient $0 = 6 + 1$, qui n'a pas de solution. Ainsi, 2 n'a pas d'antécédent par f.
- Si $y \neq 2$, alors
$$y = f(x) \iff x = \frac{3y+1}{y-2}$$

Ainsi, en posant $F = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on voit que pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Ainsi, f est bijective de E sur F et son application réciproque est

$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\to E \\ y &\mapsto \frac{3y+1}{y-2} \end{aligned}$$

Exercice 12.

Exercice 13.

Exercice 14 (⋆⋆ Théorème de Cantor)**.**

1) On définit l'application

$$\begin{aligned} g : E &\to \mathscr{P}(E) \\ x &\mapsto \{x\} \end{aligned}$$

Il est clair que g est bien définie. Montrons que g est injective. Soit $x, x' \in E$. Supposons $g(x) = g(x')$, donc $\{x\} = \{x'\}$. On en déduit trivialement que $x = x'$.

2) Supposons par l'absurde que f soit surjective. Alors comme $A \in \mathscr{P}(E)$, il existerait $z \in E$ tel que $f(z) = A$.
   (a) Si $z \in A$, alors par définition de A, on a $z \notin f(z)$, donc $z \notin A$. Contradiction.
   (b) Si $z \notin A$, alors par définition de A, on a $z \in f(z)$, donc $z \in A$. Contradiction.

   Dans tous les cas, on a donc une contradiction.

3) Supposons par l'absurde qu'il existe une application $g : \mathscr{P}(E) \to E$ injective. On note $\tilde{g}$ la corestriction de g à $g(\mathscr{P}(E))$. On montre ainsi aisément que $\tilde{g}$ est surjective et, comme g est injective, $\tilde{g}$ l'est aussi. Enfin, on pose alors :

$$\begin{aligned} h : E &\to \mathscr{P}(E) \\ x &\mapsto \begin{cases} \tilde{g}^{-1}(x) & \text{si } x \in \tilde{g}(\mathscr{P}(E)) \\ \varnothing & \text{si } x \notin \tilde{g}(\mathscr{P}(E)) \end{cases} \end{aligned}$$

Montrons que h est une surjection : soit $A \in \mathscr{P}(E)$. On pose $x = \tilde{g}(A)$. Alors (comme $\tilde{g}$ est bijective), on a $\tilde{g}^{-1}(x) = A$. Ainsi, $h(x) = A$. On a bien montré que h était surjective. Or, c'est une contradiction d'après la question 2. Finalement, il n'existe pas d'application $g : \mathscr{P}(E) \to E$ injective.

4) Supposons par l'absurde qu'il existe un ensemble E' qui contient tous les ensembles. En particulier, on a $\mathscr{P}(E') \subset E'$. On montre alors aisément que l'application

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(E') &\to E' \\ A &\mapsto A \end{aligned}$$

est injective. Cela contredit le résultat de la question 3. Ainsi, un tel ensemble E' ne saurait exister.

Note : le théorème de Cantor affirme qu'il n'existe pas de bijection entre E et $\mathscr{P}(E)$. C'est une conséquence de la question 3. De ce fait, $\mathscr{P}(E)$ est toujours "strictement plus grand" que E (y compris si ces deux ensembles sont infinis).

Transformations du plan

Exercice 15.

Exercice 16. 1) Appelons ρ cette rotation. On pose $\omega = 1 + i$. Alors :

$$\begin{aligned} \rho(z) &= e^{i\frac{\pi}{3}}(z - \omega) + \omega \\ &= e^{i\frac{\pi}{3}}(z - (1+i)) + 1 + i \end{aligned}$$

Il suffit donc de se souvenir de la fomule adéquate... On se souviendra que, en posant $z' = \rho(z)$, il est naturel que

$$\underbrace{z' - \omega}_{\text{affixe de } \overrightarrow{\Omega M'}} = e^{i\frac{\pi}{3}} \underbrace{(z - \omega)}_{\text{affixe de } \overrightarrow{\Omega M}}$$

puisque justement le vecteur $\overrightarrow{\Omega M'}$ s'obtient par la rotation du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.