TD 6 : Indications

Images directes, images réciproques, etc.

Exercice 1. En dessinant la courbe de f, deviner ce que sera la réponse, puis démontrer cela rigoureusement avec les caractérisations.

Exercice 2.

1) C'est une démonstration de cours.
2) La question 3 vous montre une situation ou l'implication réciproque est vraie. Il est probable que si on est en dehors de cette situation, des contre-exemples vont émerger.
3) Une implication est évidente. Pour l'autre, exploitez toutes les méthodes, définitions et caractérisations que vous connaissez.

Exercice 3.

1) C'est une démonstration de cours.
2) La question 3 vous montre une situation ou l'inclusion réciproque est vraie. Il est probable que si on est en dehors de cette situation, des contre-exemples vont émerger.
3) Une inclusion est évidente. Pour l'autre, exploitez toutes les méthodes, définitions et caractérisations que vous connaissez.

Exercice 4. C'est plus facile à vérifier qu'il n'y parait. Servez-vous des caractérisations.

Exercice 5. Pour montrer que deux applications sont égales, il suffit de vérifier qu'elles ont même ensemble de départ et d'arrivée, ainsi que le fait qu'elles prennent les mêmes valeurs en tout point.

Exercice 6. Pour chaque ensemble A, déterminer par un dessin ce que sera $f(A)$ pour savoir si A est stable par f. Puis, faites une preuve rigoureuse.

Exercice 7. L'outil principal est la caractérisation de $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. La conclusion tombera ensuite assez rapidement.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Exercice 8. Pour chaque fonction $f : E \to F$, essayez d'abord de prouver que f est injective. Si vous "bloquez", c'est sans doute que f n'est pas injective et le point de blocage peut vous aider à comprendre pourquoi.

Pour la surjectivité, on peut parfois s'en rendre compte au premier coup d'oeil si f n'est pas surjective. Sinon, il faut essayer, pour chaque $y \in F$ de résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$. De même, vous verrez si cela fonctionne en pratique ou non.

Exercice 9.

1) Il y a un défaut d'injectivité pour l'une, un défaut de surjectivité pour l'autre.

Exercice 10. On doit trouver $F \circ F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. La suite relève du cours.

Exercice 11. Méthode vue en classe.

Exercice 12. Méthode vue en classe.

Exercice 13. Pour tout $x \in E$, montrer que $p(x) = x$ en utilisant astucieusement les définitions.

Exercice 14 (⋆⋆ Paradoxe de Cantor)**.**

1) Si $x \in E$, quel est un exemple simple d'élément de $\mathscr{P}(E)$ qu'on pourrait associer de manière unique à x ?
2) Raisonner par l'absurde et considérer $z \in E$ tel que $f(z) = A$.
3) Si on disposait d'une injection, on pourrait la transformer en bijection par une opération du cours...

Transformations du plan

Exercice 15. C'est immédiat par le cours.

Exercice 16. C'est immédiat par le cours.