TD 5 : Corrigé

Forme algébrique, conjugué, module

Exercice 1.

Exercice 2.

Exercice 3.

Exercice 4. Soit $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
& z\overline{z} = (1-z)(1-\overline{z}) \\
\Longleftrightarrow\ & 0 = 1 - z - \overline{z} \\
\Longleftrightarrow\ & z + \overline{z} = 1 \\
\Longleftrightarrow\ & \mathrm{Re} z = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{S} = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re} z = \frac{1}{2} \right\} = \left\{ \frac{1}{2} + i\,b \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 5.

Exercice 6.

Exercice 7.

Exercice 8. 1) On procède par récurrence sur n.

- Initialisation : si $n = 1$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} k i^{k-1} = 1 \times i^0 = 1$$

$$\frac{i - n i^n - (n+1) i^{n+1}}{2} = \frac{i - i - 2i^2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

  donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose la propriété vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k i^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} k i^{k-1} + (n+1) i^n \\
&= \frac{i - n i^n - (n+1) i^{n+1}}{2} + (n+1) i^n \\
&= \frac{i - (n+1) i^{n+1} - n i^n + 2(n+1) i^n}{2} \\
&= \frac{i - (n+1) i^{n+1} + n i^{n+2} - 2(n+1) i^{n+2}}{2} \\
&= \frac{i - (n+1) i^{n+1} - (n+2) i^{n+2}}{2}
\end{aligned}$$

2) On remarque que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2p+1} ki^{k-1} &= 1+2i-3-4i+5+6i+\ldots+2p\times i^{2p-1}+(2p+1)\times i^{2p}\\ &= 1+2i-3-4i+5+6i+\ldots+i\,2p\underbrace{i^{2p-2}}_{=(-1)^{p-1}=(-1)^{p+1}}+(-1)^p(2p+1)\\ &= S_1+iS_2\end{aligned}$$

On en déduit donc, par ce qui précède :

$$\begin{aligned}S_1+iS_2 &= \frac{i-(2p+1)i^{(2p+1)}-(2p+1+1)i^{2p+1+1}}{2}\\ &= \frac{i-(2p+1)(-1)^p i-(2p+2)(-1)^{p+1}}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, en identifiant partie réelle et partie imaginaire, on trouve :

$$S_1 = -\frac{(2p+2)(-1)^{p+1}}{2} = \boxed{(-1)^p(p+1)}$$

$$S_2 = \frac{1-(2p+1)(-1)^p}{2} = \frac{1+(-1)^{p+1}(2p+1)}{2} = \boxed{\begin{cases}-p & \text{si } p\in 2\mathbb{N}\\ p+1 & \text{si } p\in 2\mathbb{N}+1\end{cases}}$$

Forme trigonométrique et trigonométrie

Exercice 9.

Exercice 10.

Exercice 11.

Exercice 12.

Exercice 13.

Exercice 14 ($\star$)**.** On a

$$\begin{aligned} &|1+z|\geq 1 \quad \text{ou} \quad |z^2+1|\geq 1\\ \iff &|1+z|^2\geq 1 \quad \text{ou} \quad |z^2+1|^2\geq 1\end{aligned}$$

On pose $z=e^{i\theta}$ avec $\theta\in\mathbb{R}$. On a :

$$|1+z|^2 = \left|1+e^{i\theta}\right|^2 = (1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta = 2+2\cos\theta$$

Ainsi,

$$|1+z|^2\geq 1 \iff 1+2\cos\theta\geq 0$$

Par le même calcul, on trouve :

$$|1+z^2|^2 \geq 1 \iff 1+2\cos(2\theta) \geq 0$$

Résolvons ces deux inéquations sur θ.

$$\begin{aligned} & 1+2\cos\theta \geq 0 \\ \iff & \cos\theta \geq -\frac{1}{2} \\ \iff & \exists k \in \mathbb{Z} \qquad \theta \in \left[-\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right] \end{aligned}$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, on a donc

$$\exists k \in \mathbb{Z} \qquad \theta \in \left]\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{4\pi}{3}+2k\pi\right[$$

Or,

$$\begin{aligned} & 1+2\cos(2\theta) \geq 0 \\ \iff & \cos(2\theta) \geq -\frac{1}{2} \\ \iff & \exists k \in \mathbb{Z} \qquad \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}+k\pi, \frac{\pi}{3}+k\pi\right] \\ \iff & \exists k \in \mathbb{Z} \qquad \theta \in \left[\frac{2\pi}{3}+k\pi, \frac{4\pi}{3}+k\pi\right] \end{aligned}$$

Ainsi, chaque réel θ vérifie l'une ou l'autre de ces conditions. Finalement, on a toujours

$$|1+z| \geq 1 \quad \text{ou} \quad |z^2+1| \geq 1$$

Racines et résolution d'équations

Exercice 15.

Exercice 16.

Exercice 17.

Exercice 18.

Exercice 19.

Exercice 20.

Exercice 21.

Exercice 22.

Exercice 23 (Autour du complexe j)**.**

Exercice 24 ($\star$)**.**

Géométrie complexe

Exercice 25.

Exercice 26.