

TD 4 : Calcul dans \mathbb{R}

(In)équations dans \mathbb{R}

Exercice 1. Soit a, b, c trois nombres réels.

1) Démontrer que $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ et $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

2) En déduire que $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$.

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

1) $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$

2) $\sqrt{x} + \sqrt{2x+1} = 5$

3) $|2x-5| = |x^2-4|$

4) $|x^2-x| = x+1$

5) $x^3 - 2x - 1 = 0$

6) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

Exercice 3. Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

1) $\frac{x+1}{x-1} > 1$

2) $2x+1 < \sqrt{x^2+8}$

3) $x-2 \geq \sqrt{3x+4}$

4) $x + \sqrt{x^2 - 5x + 4} < 2$

5) $|x+1| \leq |x-2|$

6) $|x+1| + |x-3| \leq 6$

Exercice 4. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 5. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(*) En déduire que pour tous réels x et y ,

$$\left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right| \leq \sqrt{|x-y|}$$

Indication : s'inspirer de la preuve de la seconde inégalité triangulaire...

Max, min, partie entière

Exercice 6. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\min(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|b-a|}{2} \quad \text{et} \quad \max(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|b-a|}{2}$$

Exercice 7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$ si et seulement si $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Exercice 9. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Exercice 10 (*). Calculer $\sum_{k=1}^{100} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Trigonométrie

Exercice 11. 1) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

2) En déduire que $\cos\frac{\pi}{9}$ est solution de l'équation $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

Exercice 12. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 13. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

1) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$

5) $\tan x = \tan(2x)$

3) $2\cos^2 x + \cos(2x) = 2$

6) $\sin x = \tan x$

Exercice 14. Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

1) $\sin x \geq \frac{1}{2}$

3) $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$

Exercice 15 (Tour de magie trigonométrique). Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

1)

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$$

2)

$$\cos x - \sin x = 1$$

3)

$$\sqrt{3}(1 + \sin x) = \cos x$$

4)

$$\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$