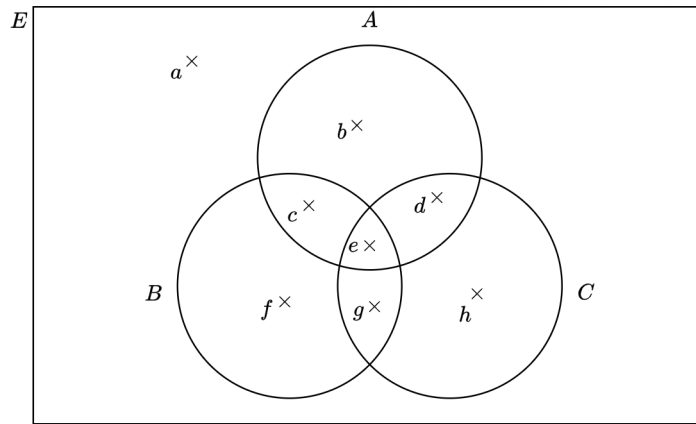


TD 2 : Ensembles

Exercice 1. On considère un ensemble E à 8 éléments dénotés a, b, c, d, e, f, g, h . On définit A, B, C trois sous-ensembles de E selon le schéma ci-dessous :



- 1) Déterminer les ensembles suivants : $A \cap C$, $B \setminus (A \cup C)$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
- 2) Donner une partition de A en quatre ensembles, qu'on exprimera en fonction de A, B, C (ou de leurs complémentaires).
- 3) Écrire l'ensemble $\{c, d, g\}$ en fonction de A, B, C (ou de leurs complémentaires).

Exercice 2. Soit A, B deux ensembles. Montrer que

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Exercice 3. Soit A, B deux ensembles. Montrer que $A = B \iff A \cup B = A \cap B$

Exercice 4. Soit A, B, C trois ensembles. Montrer que $A \cup B = B \cap C \iff A \subset B \subset C$

Exercice 5. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Indication : tout élément de \mathbb{Q} peut s'écrire $\frac{p}{q}$ avec p, q deux entiers premiers entre eux.

Exercice 6. Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

Indication : la somme ou la différence de deux rationnels est encore un rationnel.

Exercice 7. Que vaut $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$?

Exercice 8. Soit A, B deux parties d'un ensemble E . Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

- 1) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
- 2) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
- 3) $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

Exercice 9. Simplifier les ensembles suivants : $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty}]-n, n[$ $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}, n \right]$ $C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] 0, 1 + \frac{1}{n} \right[$

Exercice 10 (*). Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Résoudre les équations suivantes, d'inconnues $X \in \mathcal{P}(E)$:

1. $A \cup X = B$
2. $A \cap X = B$