

DEVOIR MAISON N°2

APPLICATIONS, RELATIONS, FONCTIONS

Exercice 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ?

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax + b$$

$$g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N} \\ x \mapsto \lfloor x \rfloor$$

$$h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln |x|$$

$$u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ (r, \theta) \mapsto re^{i\theta}$$

Pour f , discuter selon les valeurs de a, b .

Exercice 2. Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$.

- 1) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Montrer que l'inclusion réciproque est vraie si f injective.
- 2) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Montrer que l'inclusion réciproque est vraie si f surjective.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On définit la relation \mathcal{R} sur \mathbb{R} par $x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$.

- 1) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
- 2) Si $f(x) = x^2$, déterminer tous les éléments de la classe d'équivalence de x .
- 3) Si $f(x) = \cos x$, déterminer tous les éléments de la classe d'équivalence de x .

Exercice 4. On définit la relation \preceq sur \mathbb{R}^* par $x \preceq y \iff \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$.

- 1) Montrer que \preceq est une relation d'ordre, et que l'ordre est total.
- 2) Donner un majorant et un minorant de l'ensemble $\{-2, -1, 1, 2\}$ pour \preceq .
- 3) Montrer que $[1, 2]$ admet un plus petit et un plus grand élément pour \preceq et les déterminer.

Exercice 5. Dériver les fonctions suivantes. On ne justifiera pas la dérivabilité ou le domaine de définition, c'est un entraînement à appliquer les formules !

$$f_0 : x \mapsto \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)$$

$$f_1 : x \mapsto x^{2x}$$

$$f_2 : x \mapsto \sqrt{\arctan x}$$

$$f_3 : x \mapsto (x \ln x)^{-3/2}$$

$$f_4 : x \mapsto xe^x \ln x$$

Exercice 6. Donner l'ensemble de définition, dériver (en justifiant) puis dresser le tableau de variations des fonctions suivantes :

$$F : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$$

$$G : x \mapsto \sqrt{\frac{x-5}{2x+3}}$$

$$H : x \mapsto (2x)^{-x}$$