# Programme de colle n°15

semaine du 20 au 24 janvier

## Notions vues en cours

**Chapitre 18 : Structures algébriques** (suite et fin)

- Morphisme de groupes : définition, iso- / endo- / automorphisme, image de l'élément neutre, du symétrique et de l'itéré $n$-ième par un morphisme
- L'image directe et l'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe
- Noyau et image d'un morphisme, notations $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$, ce sont des sous-groupes, caractérisations de l'injectivité et de la surjectivité
- Loi produit, groupe produit, élément neutre et symétrique d'un élément dans un groupe produit
- Monoïde (hors-programme), anneau, anneau commutatif, notations $0_A$ et $1_A$ pour les éléments neutres de $+$ et $\times$ respectivement
- L'élément opposé de $a$ est noté $-a$, et si $a$ est un élément inversible, l'élément inverse de $a$ est noté $a^{-1}$
- Anneaux usuels : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ munis de $+$ et $\times$
- Sous-anneau : définition, caractérisation
- Calcul dans un anneau : $0_A a = 0_A a = 0_A$, distributivité de $\times$ sur $-$, formule du binôme, formule $a^n - b^n$
- Morphisme d'anneaux : définition, iso- / endo- / automorphisme
- L'ensemble des éléments inversibles d'un anneau $(A, +, \times)$ est un groupe pour la loi $\times$, ce groupe pourra être noté $\mathrm{Inv}(A)$
- Propriétés $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ et $(a^{-1})^{-1} = a$, un élément inversible est régulier
- Diviseur de zéro, anneau intègre, tout élément non nul d'un anneau intègre est régulier
- Corps, tout corps est un anneau intègre, hors-programme : définition et caractérisation de sous-corps

**Chapitre 19 : Calcul matriciel**

- Matrice de taille $(n,p)$, ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, coefficient d'indice $(i,j)$ de $A$, on peut le noter $A_{ij}$ ou $[A]_{ij}$
- Matrice ligne / colonne / carrée, ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, relation d'égalité dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- Somme de matrice, $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe, l'élément neutre pour $+$ est la matrice nulle notée $0_{n,p}$, multiplication d'une matrice par un scalaire
- Produit de matrices : c'est une application de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, associativité et bilinéarité du produit
- Symbole de Kronecker $\delta_{ij}$, matrice élémentaire (notation $E^{k\ell}$), formule $E^{ij}E^{k\ell} = \delta_{jk}E^{i\ell}$
- Puissance $k$-ième d'une matrice carrée avec $k \in \mathbb{N}$, vu en TD : calcul d'une puissance $k$-ième en conjecturant une formule qu'on montre par récurrence

*La formule du binôme et la notion de matrice inverse ne sont pas au programme cette semaine. L'essentiel des exercices portera sur les structures algébriques.*

**Les questions de cours sont en page 2.**

# Questions de cours

**Question libre.** Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **16 à 18**. *Des exemples de questions figurent ci-dessous.*

**Question fixée.** *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. L'image directe d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe Chapitre 18, Théorème 18.19
2. L'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe Chapitre 18, Théorème 18.19
3. Définition du produit de deux matrices : on exprimera $[AB]_{ij}$ en fonction des coefficients de $A$ et de $B$. Puis associativité du produit Chapitre 19, Définition 19.6 et Théorème 19.7

**Exemples de questions libres :**

Chapitre 16 :

- Soit $E$ un ensemble. Que doit vérifier $\mathcal{R}$ pour être une relation d'équivalence sur $E$ ?
- Soit $x \in E$ et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$. Donner la définition de la classe d'équivalence de $x$. Puis oralement : que peut-on dire de toutes les classes d'équivalence ?
- Soit $E$ un ensemble. Que doit vérifier $\mathcal{R}$ pour être une relation d'ordre sur $E$ ?
- Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur $E$. Que doit vérifier $\preceq$ pour être un ordre total ? Comment appelle-t-on un ordre qui n'est pas total ?
- Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur $E$ et $A \subset E$. Que doit vérifier $M$ pour être le maximum de $A$ pour $\preceq$ ?

Chapitre 17 :

- Rappeler le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ (avec toutes les hypothèses).
- Énoncer le théorème de Bézout-Bachet (aussi appelé relation de Bézout).
- Énoncer le lemme de Gauss.
- Donner la forme générale de la décomposition d'un entier $n$ sous forme de facteurs premiers.
- Soit $a, n \in \mathbb{Z}$. Que doit vérifier $a$ pour être inversible modulo $n$ ? Si $c$ est un tel inverse, donner une relation vérifiée par $a$ et $c$.
- Énoncer le petit théorème de Fermat.

Chapitre 18 :

- On munit $E$ d'une l.c.i. $\top$. Donner la définition d'un élément neutre pour $\top$ avec des quantificateurs.
- On munit $E$ d'une l.c.i. $\top$. Soit $x \in E$. Donner la définition de "$x$ est symétrisable pour $\top$" avec des quantificateurs.
- Rappeler (éventuellement oralement) quelles sont les 4 propriétés à vérfier pour que $(G, \top)$ soit un groupe.
- Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Donner une caractérisation de "$H$ est un sous-groupe de $G$".
- Soit $f$ un morphisme de groupes. Rappeler la définition et la notation du noyau de $f$. À quelle condition sur le noyau est-ce que $f$ est injective ?
- Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Donner une caractérisation de "$B$ est un sous-anneau de $A$"
- Rappeler la formule du binôme dans un anneau.
- Soit $(A, +, \times)$ et $(A', +, \times)$ deux anneaux. Que doit vérifier $f : A \to A'$ pour être un morphisme d'anneaux ?
- Si $(A, +, \times)$ est un anneau, quelle structure algébrique peut-on donner sur l'ensemble de ses éléments inversibles (noté $\mathrm{Inv}(A)$) ?
- Rappeler la définition d'anneau intègre.