Programme de colle n°13

semaine du 6 au 10 janvier

Notions vues en cours

Chapitre 16 : Relations binaires (le TD se trouve à la fin du poly de cours)

- Relation d'équivalence, classe d'équivalence, notations $\mathrm{cl}(x)$ ou $\overline{x}$, représentant d'une classe d'équivalence, les classes d'équivalence (distinctes) forment une partition
- Relation d'ordre, ensemble ordonné, éléments comparables, ordre total, ordre partiel
- Dans un ensemble ordonné : majorant / minorant / minimum / maximum / partie majorée / minorée / bornée, unicité du minimum et du maximum

Chapitre 17 : Arithmétique

- Relation "divise", notation $a \mid b$, l'ensemble des diviseurs (resp. multiples) de a est noté $\mathcal{D}(a)$ (resp. $a\mathbb{Z}$)
- "Divise" restreint à $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre. Sur $\mathbb{Z}$, non : si $a \mid b$ et $b \mid a$, alors $|a| = |b|$ et on dit que a et b sont associés, propriétés évidentes sur la relation divise
- Division euclidienne de a par $b \neq 0$: théorème, le reste est nul ssi $b \mid a$
- PGCD de deux entiers, notation $a \wedge b$, convention $0 \wedge 0 = 0$, propriétés évidentes du PGCD
- Si $a = bq + r$ alors $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r)$, propriété $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a \wedge b)$, algorithme d'Euclide
- Théorème de Bézout-Bachet (nom officiel : relation de Bézout), coefficients de Bézout de deux entiers, algorithme d'Euclide étendu, identité $(ca) \wedge (cb) = c(a \wedge b)$ avec $c \in \mathbb{N}^*$
- Entiers premiers entre eux, théorème de Bézout, si $(a, b) \neq (0, 0)$ alors $\dfrac{a}{a \wedge b}$ et $\dfrac{b}{a \wedge b}$ sont premiers entre eux, forme irréductible d'une fraction
- Lemme de Gauss ; $(a_1 \wedge b = 1$ et $a_2 \wedge b = 1) \implies (a_1 a_2) \wedge b = 1$; $(a \mid c$ et $b \mid c$ et $a \wedge b = 1) \implies ab \mid c$
- PGCD de n entiers, notation $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n$, associativité de $\wedge$, entiers premiers dans leur ensemble, entiers premiers entre eux deux à deux
- Généralisation des Théorèmes de Bézout-Bachet et de Bézout à n entiers, algorithme d'Euclide étendu à n entiers (principe)
- PPCM de deux entiers non nuls, notation $a \vee b$, convention $a \vee 0 = 0$, propriétés évidentes du PPCM, propriété $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}$, identité $(ca) \vee (cb) = c(a \vee b)$ avec $c \in \mathbb{N}^*$, formule $(a \vee b)(a \wedge b) = |ab|$

Les nombres premiers ne sont pas au programme de cette semaine.

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **14 à 16**. *Des exemples de questions figurent en page suivante.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Division euclidienne : on ne démontrera que l'unicité Chapitre 17, Théorème 17.6
2. Théorème de Bézout–Bachet : on ne fera la preuve que pour $a, b \in \mathbb{N}$ Chapitre 17, Théorème 17.12
3. Théorème de Bézout et Lemme de Gauss. On donnera également l'énoncé de deux autres corollaires du théorème de Bézout Chapitre 17, Théorème 17.15, Corollaire 17.18, puis Corollaires 17.19 et 17.20

Exemples de questions libres :

Chapitre 14 :

- Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et $y \in J$. Sous quelles conditions est-ce que f^{-1} est dérivable en y ? Que vaut alors $(f^{-1})'(y)$?
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Donner une condition nécessaire qui permet de déduire qu'un point $a \in I$ est un point critique de f.
- Énoncer le théorème de Rolle.
- Énoncer l'inégalité des accroissements finis pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$
- Énoncer la formule de Leibniz

Chapitre 15 :

- Donner la définition d'une fonction convexe ; puis à l'oral : qu'est-ce qui change pour une fonction concave ?
- Énoncer l'inégalité de Jensen pour une fonction convexe ; puis à l'oral : qu'est-ce qui change pour une fonction concave ?
- Énoncer l'inégalité des pentes pour une fonction convexe ; puis à l'oral : qu'est-ce qui change pour une fonction concave ?
- Que peut-on dire de la position de la courbe d'une fonction convexe par rapport à une sécante ? On pourra faire un dessin et répondre oralement.

Chapitre 16 :

- Soit E un ensemble. Que doit vérifier $\mathcal{R}$ pour être une relation d'équivalence sur E ?
- Soit $x \in E$ et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Donner la définition de la classe d'équivalence de x. Puis oralement : que peut-on dire de toutes les classes d'équivalence ?
- Soit E un ensemble. Que doit vérifier $\mathcal{R}$ pour être une relation d'ordre sur E ?
- Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur E. Que doit vérifier $\preceq$ pour être un ordre total ? Comment appelle-t-on un ordre qui n'est pas total ?
- Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur E et $A \subset E$. Que doit vérifier M pour être le maximum de A pour $\preceq$?