Programme de colle n°12

semaine du 16 au 20 décembre

Notions vues en cours

Chapitre 14 : Dérivation *(en complément du programme précédent)* :

- Fonction de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$. Ensembles $\mathscr{D}^n(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ — le $\mathbb{R}$ peut être omis en notant $\mathscr{C}^n(I)$, etc.
- Opérations sur $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ pour $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$: combinaisons linéaires, produit avec la formule de Leibniz (si $n < +\infty$), quotient, composition
- Si f est bijective de classe $\mathscr{C}^n$ et que f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ (valable aussi si $n = +\infty$)
- Fonctions complexes : adaptation des définitions / résultats précédents (excepté les notions d'extremum, de monotonie, Rolle, TAF, etc.), $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{C}) \iff \mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$, l'IAF est conservée, une fonction complexe dérivable définie sur un intervalle est constante si et seulement si $f' = 0$ en tout point intérieur de l'intervalle

Chapitre 15 : Convexité

- Fonction convexe : définition, position de la courbe d'une fonction convexe par rapport à ses cordes, inégalité de Jensen
- Si f est convexe, elle vérifie l'inégalité des pentes (c'est en fait une équivalence, mais ce résultat est hors programme)
- Caractérisation de la convexité avec les variations de la dérivée
- Caractérisation de la convexité avec le signe de la dérivée seconde
- Position de la courbe d'une fonction convexe dérivable par rapport à sa tangente
- Position de la courbe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes
- Fonction concave : définition, adaptation de tous les résultats précédents

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **13 à 15**. *Des exemples de questions figurent en page suivante.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Énoncés uniquement : théorème de la limite de la dérivée et formule de Leibniz Chapitre 14, Théorèmes 14.25 et 14.29
2. Inégalité des pentes : on ne démontrera cela que pour une fonction convexe. Chapitre 15, Théorème 15.9
3. Montrer que si f' est croissante, alors f est convexe. Donner également l'énoncé (uniquement) de la propriété associée Chapitre 15, Théorème 15.11

Exemples de questions libres :

Chapitre 13 :

- Donner la définition de “f est continue en a” en termes de limite puis en termes de quantificateurs.
- Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite pour une fonction f, pour une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ au point a.
- Soit $a \in I$. À quelle condition peut-on prolonger par continuité une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$ au point a ? Que vaut alors $f(a)$?
- Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires (ou son corollaire au choix de l’examinateur).
- Énoncer le théorème des bornes atteintes.

Chapitre 14 :

- Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et $y \in J$. Sous quelles conditions est-ce que f^{-1} est dérivable en y ? Que vaut alors $(f^{-1})'(y)$?
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Donner une condition nécessaire qui permet de déduire qu’un point $a \in I$ est un point critique de f.
- Énoncer le théorème de Rolle.
- Énoncer l’inégalité des accroissements finis pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$
- Énoncer la formule de Leibniz

Chapitre 15 :

- Donner la définition d’une fonction convexe ; puis à l’oral : qu’est-ce qui change pour une fonction concave ?
- Énoncer l’inégalité de Jensen pour une fonction convexe ; puis à l’oral : qu’est-ce qui change pour une fonction concave ?
- Énoncer l’inégalité des pentes pour une fonction convexe ; puis à l’oral : qu’est-ce qui change pour une fonction concave ?
- Que peut-on dire de la position de la courbe d’une fonction convexe par rapport à une sécante ? On pourra faire un dessin et répondre oralement.