Programme de colle n°11

semaine du 9 au 13 décembre

Notions vues en cours

Chapitre 13 : Limites, continuité *(en complément du programme précédent)* :

- Théorème des valeurs intermédiaires. Si la fonction est de plus strictement monotone, alors elle est injective (c'est même une équivalence)
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Une fonction continue qui ne s'annule pas garde un signe (strict) constant
- Théorème des bornes atteintes. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment
- Théorème de la bijection monotone
- Fonctions complexes : extension des notions de limite (finie), de continuité, etc. Caractérisations avec les parties réelles et imaginaires

Chapitre 14 : Dérivation

- Taux d'accroissement, nombre dérivée, caractérisation avec un DL d'ordre un, dérivabilité entraine continuité
- Fonction dérivée, opérations et dérivations : somme, produit, quotient, composition, réciproque
- Dérivées à droite et à gauche : défintion, caractérisation de la dérivabilité
- Extremum / maximum / minimum (global ou local), point critique, tout extremum local en un point intérieur est un point critique
- Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, interprétation graphique
- Lien entre dérivée et monotonie : caractérisations de la monotonie (stricte ou non)dt
- Fonction (K-)lipschitzienne, le caractère lipschitz entraine la continuité
- Inégalité des accroissements finis, l'implication de l'énoncé est en fait une équivalence, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors f est K-lipschitzienne avec $K = \max\limits_{[a,b]} |f'(x)|$
- Limite épointée de $f : I \to \mathbb{R}$ en un point $a \in I$, notation $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$, lien avec les limites à gauche et à droite en a (selon que a soit une extrémité de I ou un point intérieur de I)
- Théorème de la limite de la dérivée

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **11 à 13**. *Des exemples de questions figurent en page suivante.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Théorème des valeurs intérmédaires Chapitre 13, Théorème 13.31
2. Théorème des bornes atteintes Chapitre 13, Théorème 13.36
3. Rappeler (sans le démontrer) un théorème qui donne une condition nécessaire pour qu'un point a soit un point critique de f ; puis avec démonstration : théorème de Rolle Chapitre 14, Théorèmes 14.13 et 14.14

Exemples de questions libres :

Chapitre 11 :

- Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Que doit vérifier M pour être un majorant de A ? pour être le maximum de A ?
- Que veut-dire la phrase “$\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure” ?
- Compléter la caractérisation de la borne inférieure : $m = \inf A \iff$ ...
- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Donner la définition de l'écriture “ $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$”
- Soit $X \subset \mathbb{R}$. Donner une définition de “X est une partie dense dans $\mathbb{R}$” (deux assertions possibles, une seule suffit).

Chapitre 12 :

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition de $u_n \to \ell$ en termes de quantificateurs.
- Donner la définition de $u_n \to +\infty$ en termes de quantificateurs.
- Donner la définition de “(u_n) et (v_n) sont adjacentes” puis oralement : que peut-on en déduire sur (u_n) et (v_n) ?
- Donner la définition de “ℓ est une valeur d'adhérence de (u_n)”.
- Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Énoncer une caractérisation de “$M = \sup A$” avec des suites.

Chapitre 13 :

- Donner la définition de “f est continue en a” en termes de limite puis en termes de quantificateurs.
- Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite pour une fonction f, pour une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ au point a.
- Soit $a \in I$. À quelle condition peut-on prolonger par continuité une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$ au point a ? Que vaut alors $f(a)$?
- Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires (ou son corollaire au choix de l'examinateur).
- Énoncer le théorème des bornes atteintes.