Programme de colle n°8

semaine du 18 au 22 novembre

Notions vues en cours

Chapitre 10 : Équations différentielles *(en complément de la semaine précédente)*

- ED linéaire du second ordre $ay'' + by' + cy = d(t)$ avec $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $d : I \to \mathbb{K}$ continue

  0) Donnée de l'intervalle d'étude I

  1) Solution générale de l'équation homogène (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

  2) Solution particulière (pour d polynômial ou de la forme $d(t) = e^{qt}$ avec $q \in \mathbb{K}$)

  3) Solution générale de l'ED avec second membre

- Problème de Cauchy (ordre 2), théorème de Cauchy-Lipschitz (ordre 2), et 4) Vérification des conditions initiales associées
- Principe de superposition pour traiter des seconds membres plus variés

Chapitre 11 : Nombres réels

- Majorant, minorant, maximum (ou plus grand élément), minimum (ou plus petit élément) d'une partie de $\mathbb{R}$. Partie majorée, minorée, bornée
- Borne inférieure et borne supérieure : définition, caractérisation, $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure
- Si A admet un maximum, alors elle admet une borne supérieure et $\inf A = \max A$
- Approximation décimale d'un réel : valeur approchée (par défaut, par excès) d'un réel à 10^{-n} près
- Partie dense dans $\mathbb{R}$. Les ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. Tout intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ contient une infinité d'éléments de $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- Compléments : droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$, définition d'un intervalle de $\mathbb{R}$ (partie de $\mathbb{R}$ “sans trou”)

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés “non-officiel”), parmi les chapitres **8, 9 ou 11**. *Des exemples de questions figurent en page suivante.*

Question fixée.

1. *Énoncé uniquement* : définition d'un majorant, du maximum et de la borne supérieure d'une partie $A \subset \mathbb{R}$; propriété de la borne supérieure ; caractérisation de la borne supérieure Chapitre 11, réparti dans les encadrés 11.1 à 11.7
2. Idem que le point précédent avec minorant, minimum, borne inférieure, etc.
3. Définition d'une partie dense, et démonstration de l'équivalence entre les deux assertions de la définition Chapitre 11, Proposition 11.11

Exemples de questions libres :

Chapitre 8 :

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective. Quelles sont les hypothèses à vérifier pour affirmer que f^{-1} est dérivable en y ? Que vaut alors $(f^{-1})'(y)$?
- Énoncer les croissances comparées en $+\infty$
- Pour quelles valeurs de x a-t-on $\arcsin(\sin x) = x$? Et $\sin(\arcsin x) = x$?
- Donner les dérivées de $\arccos x$ et de $\arctan x$.
- Donner deux expressions de la dérivée de $\text{th}x$.

Chapitre 9 :

- Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
- Soit u une fonction dérivable. Donner une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ et de $u'u^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Donner une primitive de $\cos(3x)$ et de $\dfrac{1}{1+x^2}$.
- Énoncer le théorème d'intégration par parties en rappelant bien toutes les hypothèses.
- Que peut-on dire de $\displaystyle\int_{-a}^{a} f$ si f est impaire ? si f est paire ?

Chapitre 11 :

- Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Que doit vérifier M pour être un majorant de A ? pour être le maximum de A ?
- Que veut-dire la phrase "$\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure" ?
- Compléter la caractérisation de la borne inférieure : $m = \inf A \iff$ ...
- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Donner la définition de l'écriture "$\displaystyle\sup_{x\in[a,b]} f(x)$"
- Soit $X \subset \mathbb{R}$. Donner une définition de "X est une partie dense dans $\mathbb{R}$" (deux assertions possibles, une seule suffit).