Programme de colle n°5

semaine du 14 au 18 octobre

Notions vues en cours

Chapitre 6 – Applications (suite) :

- Injection, surjection, bijection : définitions, caractérisation selon les solutions de l'équation $f(x) = y$, l'application $f : E \to F$ est surjective ssi $f(E) = F$
- Si f et g sont injectives (resp. surjectives, resp. bijectives) alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective, resp. bijective)
- Application réciproque f^{-1} : définition, caractérisation avec l'existence d'une fonction g qui est l'inverse à gauche et droite, vu en TD : calcul de f^{-1} en résolvant $f(x) = y$
- Réciproque de $g \circ f$, réciproque de f^{-1}, la notation $f^{-1}(B)$ remplace $f^{\leftarrow}(B)$: il n'y a pas d'ambiguité car $f^{\leftarrow}(B)$ coïncide avec l'image directe de B par f^{-1}
- Transformations du plan complexe : translations, homothéties et rotations
- Similitude directe : définition, interprétation, méthode pour la décomposer en les transformations ci-dessus

Chapitre 7 – Généralités sur les fonctions

- Fonction f : définition, ensemble de définition D_f, il s'agit d'une application, courbe représentative C_f
- Fonction paire, fonction impaire, fonction T-périodique
- Déduction, à partir de la courbe C_f, de la courbe des fonctions $x \mapsto f(x) + a$, de $x \mapsto f(x - a)$, etc.
- Opérations sur $\mathbb{R}^D$: somme, différence, produit, quotient, $|f|$, λf avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Relations $\leq$ et $<$ sur $\mathbb{R}^D$ (la relation $=$ étant définie dans le chapitre précédent)
- Composée de deux fonctions, définition et détermination de $D_{g \circ f}$
- Sens de variation : fonction croissante, décroissante, monotone (et les variantes avec "strictement"), fonction constante, opérations et monotonie : somme, multiplication par un réel, produit, composition
- Fonction majorée, minorée, bornée, positive, négative (et les variantes avec "strictement"), notations $f \geq 0$, $f > 0$, $f \equiv 0$ et $f \not\equiv 0$
- Asymptote horizontale, verticale

Hors-programme : relations d'ordre et relations d'équivalence (seront vues ultérieurement)

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **4 à 6**. *Des exemples de questions figurent en page suivante.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Définitions de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité. Donner une caractérisation de la surjectivitéChapitre 6, Définitions 6.14 à 6.16 et Théorème 6.17
2. Montrer que si f et g sont injectives (resp. surjectives, resp. bijectives) alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective, resp. bijective). Chapitre 6, Théorème 6.18
3. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, que peut-on dire de f^{-1} et $g \circ f$? On écrira explicitement le théorème utilisé pour la démonstration (sans le démontrer) Chapitre 6, Théorèmes 6.22, qui utilise le Théorème 6.21

Exemples de questions libres :

Chapitre 4 :

- Compléter la formule $a^n - b^n = ...$
- Compléter la formule $\sum_{k=1}^{n} k^2 = ...$
- Compléter la formule $\sum_{k=0}^{n} x^k = ...$
- Énoncer la propriété du triangle de Pascal.
- Compléter la formule $(a+b)^n = ...$

Chapitre 5 :

- Compléter les formules suivantes : $z + \overline{z} = ...$ et $z - \overline{z} = ...$
- Compléter l'identité remarquable suivante : $|u+v|^2 = ...$
- Si $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$ (avec $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$), que peut-on en déduire sur r, r', θ, θ' ?
- Donner les formules d'Euler.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les racines n-ièmes de l'unité ?
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Rappeler la définition de e^z et l'écrire sous forme trigonométrique.

Chapitre 6 :

- Soit $A \subset E$. Donner la définition de l'application indicatrice sur A.
- Donner la définition de $f^{-1}(B)$ ou une caractérisation qui concerne cet objet.
- Donner les formules concernant $f(A \cup A')$ et $f(A \cap A')$
- Donner la définition de "f injective" en termes de quantificateurs
- Donner la définition de "s est une similitude directe".