Programme de colle n°4

semaine du 7 au 11 octobre

Notions vues en cours

Chapitre 5 – Nombres complexes (suite) :

- Méthode : angle moitié pour factoriser $e^{ia} \pm e^{ib}$
- Argument d'un complexe non nul : définition, propriétés, interprétation géométrique, l'unique argument qui est dans $]-\pi, \pi]$ est appelé argument principal
- Caractérisation qu'un complexe non nul soit réel, imaginaire pur, etc. en fonction d'un de ses arguments
- Forme trigonométrique d'un complexe non nul : définition, caractérisation d'égalité, règles de calcul
- Transformation de $a\cos x + b\sin x$ en $A\cos(x-\varphi)$ avec a, b, x, A, φ réels
- Racine carrée d'un complexe ω : définition, si $\omega \neq 0$ alors il y a deux racines carrées opposées, si $\omega = 0$ il n'y en a qu'une, méthode pour les déterminer (avec ω sous forme algébrique ou trigonométrique)
- Racine(s) d'un trinôme du second degré $az^2 + bz + c$ avec a, b, c complexes
- Relations coefficients-racines pour un trinôme du second degré, résolution de systèmes avec cette technique
- Racines n-ièmes de l'unité, ensemble $\mathbb{U}_n$, racine(s) n-ième d'un complexe ω (il y en a n si $\omega \neq 0$, une si $\omega = 0$)
- Exponentielle complexe : définition, propriétés
- Géométrie : calcul d'un angle orienté, caractérisation d'un alignement de points, de l'orthogonalité de vecteurs

Chapitre 6 – Applications :

- Vocabulaire sur les applications : définition, ensembles de départ et d'arrivée, image d'un élément, antécédent d'un élément, application bien définie, restriction avec la notation $f\big|_A$, prolongement, co-restriction (hors-programme) avec la notation $f\big|^B$, graphe d'une application
- Exemples d'applications : fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$, application identité id_E, les fonctions usuelles, une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un ensemble E peut être vue comme une application de I dans E
- Image directe / réciproque d'un ensemble par une application : définition, notation, caractérisation, propriétés
- Composition d'applications : définition, associativité, absence de commutativité, composition avec l'identité

Les transformations du plan complexe ne sont pas au programme de cette semaine.
L'image réciproque d'un ensemble B par une application f est pour le moment notée $f^{\leftarrow}(B)$.

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **3 à 5**. *Des exemples de questions figurent en page suivante.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Calcul d'une racine carrée ou d'une racine n-ième d'un ou deux complexes donnés par l'examinateur. Chapitre 5, Méthode p. 18 et Théorème 5.37
2. Image directe : définition, caractérisation (énoncé uniquement), démonstration de $A \subset A' \implies f(A) \subset f(A')$ et $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ Chapitre 6, Définition 6.6, Théorème 6.7 et Théorème 6.11 1.a) et 1.b)
3. Image réciproque : définition, caractérisation (énoncé uniquement), puis démonstration des résultats suivants : $B \subset B' \implies f^{\leftarrow}(B) \subset f^{\leftarrow}(B')$ et $f^{\leftarrow}(B \cap B') = f^{\leftarrow}(B) \cap f^{\leftarrow}(B')$ Chapitre 6, Définition 6.9, Théorème 6.10 et Théorème 6.11 2.a) et 2.b)

Exemples de questions libres :

Chapitre 3 :

- Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Donner deux caractérisations de $p = \lfloor x \rfloor$
- Donner deux formules faisant intervenir $\cos(2x)$
- Compléter les formules suivantes : $\cos(a+b) = ...$ et $\sin(a-b) = ...$
- Compléter la formule suivante : $\cos a \cos b = ...$
- Compléter la formule $\tan(a+b) = ...$

Chapitre 4 :

- Compléter la formule $a^n - b^n = ...$
- Compléter la formule $\sum_{k=1}^n k^2 = ...$
- Compléter la formule $\sum_{k=0}^n x^k = ...$
- Énoncer la propriété du triangle de Pascal.
- Compléter la formule $(a+b)^n = ...$

Chapitre 5 :

- Compléter les formules suivantes : $z + \overline{z} = ...$ et $z - \overline{z} = ...$
- Compléter l'identité remarquable suivante : $|u+v|^2 = ...$
- Si $re^{i\,\theta} = r'e^{i\,\theta'}$ (avec $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$), que peut-on en déduire sur r, r', θ, θ' ?
- Donner les formules d'Euler.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les racines n-ièmes de l'unité ?
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Rappeler la définition de e^z et l'écrire sous forme trigonométrique.